4. Residuenkalkül

4.1 Pole und wesentliche Singularitäten

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, und sei $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

Def. 4.1.1. Die Stelle $a \in \Omega$ heißt

i) hebbare Singularität, falls
$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0 ;$$

ii) Pol von f, falls
$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty ;$$

iii) wesentliche Singularität von f, andernfalls.

Bem. 4.1.1. Falls $a \in \Omega$ eine hebbare Singularität von f ist, so können wir gemäß Satz 3.4.2 die Funktion f zu einer holomorphen Funktion $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ fortsetzen.

Beisp. 4.1.1. i) Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$ hat die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\},$$

einen Pol an der Stelle a.

ii) Seien $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome ohne gemeinsame Nullstellen, $f = p/q : \mathbb{C} \setminus Z \to \mathbb{C}$, wo

$$Z = \{z \in \mathbb{C};\ q(z) = 0\}.$$

Dann hat f an jeder Stelle $a \in Z$ einen Pol.

Bew.: Da nach Annahme $p(z) \neq 0$ für jedes $z \in Z$, gilt für jedes $a \in Z$:

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \lim_{z \to a} \frac{|p(z)|}{|q(z)|} = \infty.$$

iii) Die Funktion $f(z) = \exp(1/z)$, $z \in \mathbb{C}$, hat an der Stelle $a = 0$ eine wesentliche Singularität.

Bew.: Es gilt (für $z = x + iy \in \mathbb{C}$):

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \infty \neq \lim_{x \uparrow 0} f(x) = 0.$$

Das Verhalten von f bei einer Polstelle $a \in \Omega$ kann man durch Betrachten der holomorphen Funktion $h = \frac{1}{f} : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, $0 < r << 1$, sehr leicht vollständig charakterisieren, da mit

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$$

folgt, daß gilt

$$\lim_{z \to a} h(z) = 0,$$

womit die Singularität $a \in \Omega$ von h hebbar ist und sich h zu einer holomorphen Funktion in einer Umgebung von a fortsetzen läßt, für die die Cauchysche Integraldarstellung sowie die Darstellung als Potenzreihe gemäß Satz 3.4.1 und Kor. 3.4.1 gültig sind.

Auf diesem Weg erhält man den folgenden Satz.

Satz 4.1.1: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol an der Stelle z_0. Dann gilt:

i) Es gibt genau ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$, so daß

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}}, \quad z \in \Omega \setminus \{z_0\}:$$

ii) Es gibt $b_k \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq n_0$, mit $b_{n_0} \neq 0$, wobei n_0 wie in i), und eine holomorphe Funktion $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$, so daß

$$f(z) = \frac{b_{n_0}}{(z-z_0)^{n_0}} + \ldots + \frac{b_1}{z-z_0} + \phi(z), \quad z \in \Omega \setminus \{z_0\},$$

und

iii) für $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ gilt

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

Def. 4.1.2. Die Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ in Satz 4.1.1 heißt <u>Ordnung</u> der Polstelle z_0.

__Bew.:__ i) Da $|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$, existiert $r > 0$ mit

$$\forall\, z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} : |f(z)| \geq 1 .$$

Die Funktion $h = 1/f : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist holomorph und beschränkt. Nach Satz 3.4.2 läßt sich h zu einer holomorphen Funktion h auf ganz $B_r(z_0)$ fortsetzen mit

$$h(z_0) = \lim_{z \to z_0} 1/f(z) = 0 .$$

Da somit h nicht konstant ist, $B_r(z_0)$ zshg, existiert nach Kor. 3.4.2 ein kleinstes $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$h^{(n_0)}(z_0) \neq 0 ,$$

und nach Kor. 3.4.1 können wir h entwickeln

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$= (z - z_0)^{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n - n_0}$$

$$=: (z - z_0)^{n_0}\, l(z)$$

mit
$$l(z) := \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-n_0} .$$

Nach Bem. 3.4.1. ii) konvergiert die Potenzreihe l lokal gleichmäßig in $B_r(z_0)$. mit $l(z_0) = h^{(n_0)}(z_0)/n_0! \neq 0$.

Die Funktion $g = 1/l$ mit
$$g(z) = \frac{1}{l(z)} = \frac{(z-z_0)^{n_0}}{h(z)} = (z-z_0)^{n_0} f(z)$$
ist dann holomorph in Ω mit $g(z_0) \neq 0$, und
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}} .$$

ii) Entwickeln wir
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$
gemäß Kor. 3.4.1, so folgt
$$f(z) = \frac{g(z_0)}{(z-z_0)^{n_0}} + \frac{g'(z_0)}{(z-z_0)^{n_0-1}} + \dots + \frac{g^{(n_0-1)}(z_0)}{(n_0-1)!(z-z_0)} + \phi(z)$$

mit
$$\phi(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-n_0},$$

wie gewünscht.

iii) Schließlich gilt nach Satz 3.4.1 für $\cancel{z_0}\, z \in B_r(z_0)$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta + \sum_{n=1}^{n_0} I_n,$$

wobei mit $b_n = g^{(n_0-n)}(z_0)/(n_0-n)!$ gilt

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{b_n}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} \, d\zeta, \quad 1 \leq n \leq n_0.$$

<u>Beh.:</u> $I_n = 0$, $1 \leq n \leq n_0$.

<u>Bew.:</u> Für $z \in B_r(z_0)$, $\zeta \in \partial B_r(z_0)$ schreibe

$$\zeta - z = \zeta - z_0 + z_0 - z = (\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right).$$

Beachte, daß $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$, gleichmäßig in $\zeta \in \partial B_r(z_0)$. Somit können wir entwickeln

$$\frac{1}{(\zeta-z_0)^n(\zeta-z)} = \frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1+n}}.$$

Da $n \geq 1$, hat für jedes $k \geq 0$ die Funktion

$$p(\zeta) = \frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1+n}}$$

die Stammfunktion $P(\zeta) = -\frac{1}{k+n} \cdot \frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+n}}$,

und $I_n = 0$ gemäß Satz 3.1.1.

$\square$

Sei $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol der Ordnung n_0 an der Stelle z_0.

mit

$$(4.1.1) \quad f(z) = \frac{b_{n_0}}{(z-z_0)^{n_0}} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0} + \phi(z)$$

wie in Satz 4.1.1. ii).

<u>Def.</u> 4.1.3. Die Summe

$$P(z) = \frac{b_{n_0}}{(z-z_0)^{n_0}} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0}$$

heißt <u>Hauptteil</u> von f an der Polstelle z_0,

$$b_1 =: \operatorname{res}_{z_0} f$$

heißt das <u>Residuum</u> von f an dieser Stelle.

<u>Bem.</u> 4.1.2. i) Da alle Terme außer dem Term $\frac{b_1}{z-z_0}$ in der Entwicklung (4.1.1) von f Stammfunktionen besitzen, gilt nach den Sätzen 3.1.1, 3.3.2 und 3.4.1 für $r>0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(z)\,dz \overset{(\text{Satz } 3.1.1 \text{ u. } 3.3.2)}{=} \frac{b_1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{dz}{z-z_0} \overset{(\text{Satz } 3.4.1)}{=} b_1 = \operatorname{res}_{z_0} f.$$

ii) Weitere Darstellungen des Residuums erhält man durch Multiplikation

$$(z-z_0)^{n_0} f(z) = b_{n_0} + b_{n_0-1}(z-z_0) + \ldots + b_1 (z-z_0)^{n_0-1}$$

$$+ (z-z_0)^{n_0} \phi(z) .$$

Es folgt

$$\operatorname{res}_{z_0} f = b_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n_0-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n_0-1} \left((z-z_0)^{n_0} f(z)\right) .$$

iii) Insbesondere, falls

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + \phi(z)$$

bei z_0 eine einfache Polstelle (mit $n_0 = 1$) besitzt, so gilt

$$\operatorname{res}_{z_0} f = b_1 = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} (z-z_0) f(z) .$$

iv) Umgekehrt folgt aus der Existenz von

$$b = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} (z-z_0) f(z) , \quad |b| < \infty ,$$

daß z_0 Ordnung $n_0 = 1$ hat, da für $n_0 > 1$ mit Satz 4.1.1. i) gilt

$$|(z-z_0) f(z)| = \frac{|g(z)|}{|z-z_0|^{n_0-1}} \to \infty \quad \left(\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}\right) .$$

Falls die holomorphe Funktion f mehr als eine Polstelle besitzt, können wir Bem. 4.1.2. i) wie folgt verallgemeinern.

<u>Satz</u> 4.1.2 (Residuensatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_1, \dots, z_K \in \Omega$, $f: \Omega \setminus \{z_k;\ 1 \le k \le K\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Polstellen bei z_k, $1 \le k \le K$.

Dann <u>gilt</u> für jeden Kreis $B = B_R(z_0)$, $R > 0$, mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ und mit $\partial B_R(z_0) \subset \Omega \setminus \{z_k;\ 1 \le k \le K\}$ die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} f(z)\,dz = \sum_{k:\, z_k \in B_R(z_0)} \operatorname{res}_{z_k} f .$$

<u>Bew.</u>: OBdA gelte $z_k \in B_R(z_0)$, $1 \le k \le K$.

Für genügend kleine $r > 0$ und

$$\mathcal{U} = B_R(z_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{K} B_r(z_k)$$

gilt analog zum Beweis von Satz 3.4.2

$$0 = \int_{\partial \mathcal{U}} f(z)\,dz = \int_{\partial B_R(z_0)} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial B_r(z_k)} f(z)\,dz ,$$

und

$$\int_{\partial B_r(z_k)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_k} f, \quad 1 \le k \le K,$$

gemäß Bem. 4.1.2. $\square$

Beisp. 4.1.2. Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \overset{(y=\arctan x)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy = \pi$$

mittels Residuensatz, wie folgt.

Betrachte

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

mit einfachen Polen bei $z = \pm i$ und

$$\mathrm{res}_{\{z=i\}} f = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \frac{1}{2i},$$

und für $0 < r \ll 1 \ll R$ betrachte

$$U = U_{R,r} = B_R^+(0) \setminus B_r(i),$$

wobei $\quad B_R^+(0) = \{z = x+iy;\ |z| < R, y > 0\}$.

Wiederum ~~zeigt~~ eine Zerlegung $U = \bigcup_{k=1}^{K} U_k$ mittels einem genügend feinem, achsenparallelen Gitter, so daß $U_k \subset B_{r_k}(z_k) \subset \overline{B_{r_k}(z_k)} \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, $1 \le k \le K$, daß gilt

$$\int_{\partial U} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial U_k} f(z)\,dz = 0.$$

Andererseits gilt

$$\int_{\partial U} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz - \int_{\partial B_r(i)} f(z)\,dz ,$$

wobei $\gamma_R(t) = R\,e^{it}, \quad 0 \le t \le \pi .$

Mit

$$|f(z)| \le \frac{1}{|z|^2 - 1} = \frac{1}{R^2-1}, \quad |z| = R,$$

folgt

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \right| \le \pi R \max_{|z|=R} |f(z)| \le \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0;$$

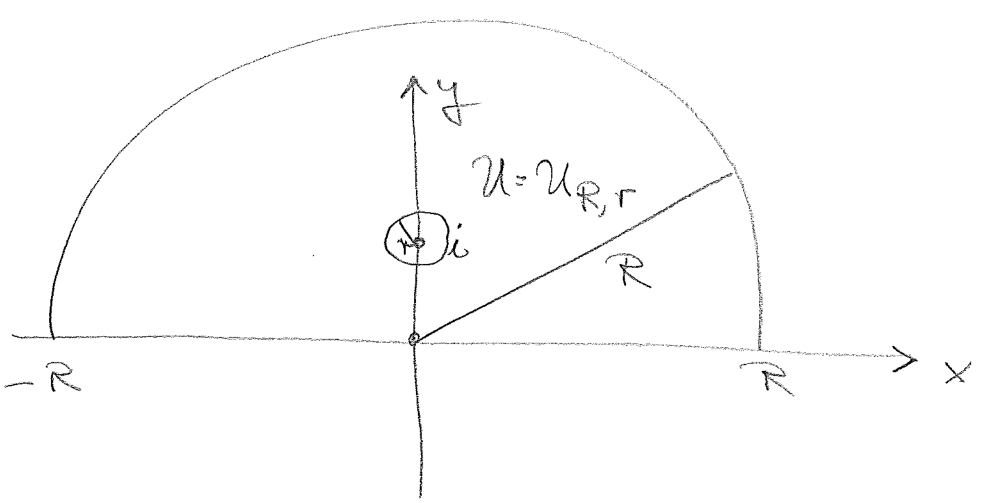
$(R \to \infty)$

weiter gilt nach Bem. 4.1.2. i) für $0 < r < 2$:

$$\int_{\partial B_r(i)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\{z=i\}} f = \pi .$$

Wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \pi .$$



Beisp. 4.1.3. Sei $0<a<1$. Wir zeigen

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} .$$

Betrachte dazu

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^{z}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{ i(\pi + 2\pi k);\ k \in \mathbb{Z} \},$$

und die Gebiete

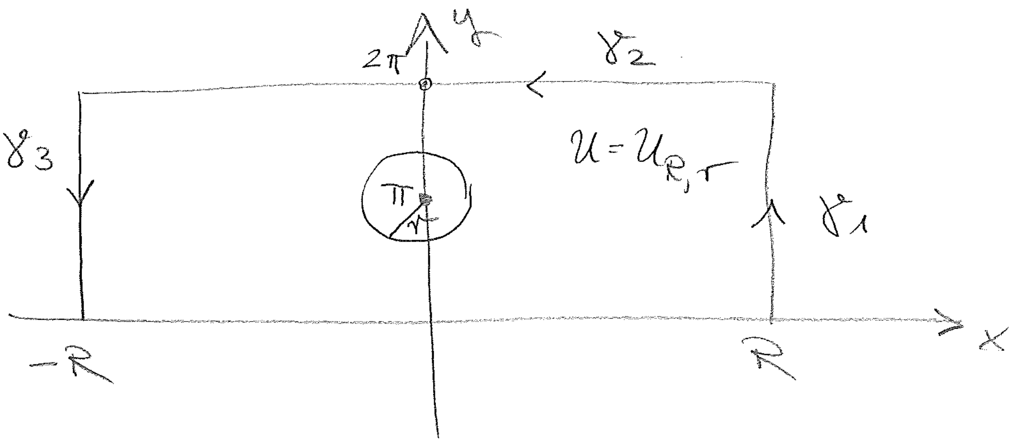
$$U = U_{R,r} = \{ z = x+iy;\ |x| < R,\ 0<y<2\pi \} \setminus B_r(i\pi)$$

für $0 < r \ll 1 \ll R < \infty$. Wieder gilt

$$0 = \int_{\partial U} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx + \int_{\gamma} f(z)\,dz - \int_{\partial B_r(i\pi)} f(z)\,dz ,$$

wo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ mit

$$\gamma_1(t) = R + it, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\gamma_2(t) = R - t + 2\pi i, \quad 0 \le t \le 2R,$$
$$\gamma_3(t) = -R + i(2\pi - t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$



Mit

$$|f(z)| \leqslant \frac{e^{aR}}{e^{R}-1} \leqslant 2\,e^{(a-1)R} \underset{(\log 2 \leq R \to \infty)}{\longrightarrow} 0, \quad z = R+iy,$$

folgt $\left| \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \right| \leqslant 4\pi\, e^{(a-1)R} \underset{(\log 2 \leq R \to \infty)}{\longrightarrow} 0 .$

Analog folgt mit

$$|f(z)| \leqslant \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}} \leqslant 2e^{-aR} \underset{(\log 2 \leq R \to \infty)}{\longrightarrow} 0, \quad z = -R+iy$$

die Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma_3} f(z)\,dz \right| \leqslant 4\pi\, e^{-aR} \underset{(\log 2 \leq R \to \infty)}{\longrightarrow} 0 .$$

Weiter gilt

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{2\pi i a} \cdot e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx \underset{(R \to \infty)}{\longrightarrow} -e^{2\pi i a}\, I \, ;$$

also

$$\left(1-e^{2\pi i a}\right) I = \int_{\partial B_r(i\pi)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\{z=i\pi\}} f .$$

Mit Bem. 4.1.2. iii) erhalten wir

$$\operatorname{res}_{\{z=i\pi\}} f = \lim_{z\to i\pi} (z-i\pi) f(z)$$

$$= \lim_{z\to i\pi} e^{az} \frac{z-i\pi}{e^z - e^{i\pi}} = \frac{e^{i\pi a}}{\exp'(i\pi)} = -e^{i\pi a};$$

also

$$I = -\frac{2\pi i\, e^{i\pi a}}{1-e^{2\pi i a}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Satz 4.1.1 liefert eine nahezu vollständige Beschreibung einer holomorphen Funktion in der Umgebung einer Polstelle.

Das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe einer wesentlichen Singularität ist davon radikal verschieden, wie der folgende Satz zeigt.

<u>Satz</u> 4.1.3 (Casarati - Weierstrass). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer wesentlichen Singularität an der Stelle $z_0 \in \Omega$. Dann gilt

$$\forall r>0 : \quad \overline{f\big(B_r(z_0) \cap \Omega\big)} = \mathbb{C} .$$

<u>Bew.</u>: (indirekt). Nimm an, es gibt $w_0 \in \mathbb{C}$, $r>0$ mit

$$\delta := \inf \{ |f(z) - w_0| ; \ z \in B_r(z_0) \cap \Omega \} > 0 .$$

Die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} , \quad z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\},$$

ist dann holomorph und beschränkt. Nach

Satz 3.4.2 können wir g zu einer holomorphen Funktion $g : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ fortsetzen, und

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$= (z-z_0)^{n_0} h(z)$$

mit minimalem $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und holomorphem

$$h(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-n_0}$$

gemäß Kor. 3.4.1. ii), mit $h(z_0) \neq 0$.

Es folgt

$$f = w_0 + \frac{1}{g} \quad \text{in } B_r(z_0) \setminus \{z_0\},$$

und f hat eine hebbare Singularität an der Stelle z_0, falls $n_0 = 0$, bzw. einen Pol der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$, falls $n_0 > 0$.

Beide Fälle widersprechen jedoch unserer Annahme, daß z_0 wesentliche Singularität ist.

$\square$

Trotz der in Satz 4.1.3 hervortretenden Unterschiede zwischen Polstellen und wesentlichen Singularitäten führt die im Beweis vom Cauchy'schen Darstellungssatz (Satz 3.4.1) und von Kor. 3.4.1 zu einer dem Hauptteil einer holomorphen Funktion mit Polstelle ähnlichen Darstellung im Falle einer wesentlichen Singularität.

<u>Satz 4.1.4</u> (Laurent-Reihenentwicklung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, $R > 0$ mit $B_R(z_0) \subset \Omega$. Dann gilt für jedes $0 < r < R$ für jedes $z \in B_R(z_0) \setminus \overline{B_r(z_0)}$ $=: A_{R,r}(z_0)$ die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, wobei die Reihe lokal gleichmäßig in $A_{R,r}(z_0)$ absolut konvergiert. Falls f bei z_0 eine Polstelle hat der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$, so gilt $a_n = 0$ für $n < n_0$.

Bew.: Nach Kor. 3.3.1 gilt für jedes $z \in A_{R,r}(z_0)$ und jedes $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B_{2\varepsilon}(z)} \subset A_{R,r}(z_0)$ für $\mathcal{U} := A_{R,r}(z_0) \setminus B_\varepsilon(z)$ die Gleichung

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{U}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta ,$$

wobei

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z)$$

gemäß Satz 3.4.1. Es folgt:

$$\forall z \in A_{R,r}(z_0): \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

Entwickle nun für $|z - z_0| < R = |\zeta - z_0|$, $\zeta \in \partial B_R(z_0)$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

in eine gleichmäßig in $\zeta \in \partial B_R(z_0)$ und lokal gleichmäßig in $z \in A_{R,r}(z_0)$ absolut konvergente Reihe.

Ebenso erhalten wir für $|\zeta - z_0| = r < |z - z_0|$ die gleichmäßig in $\zeta \in \partial B_r(z_0)$ und lokal gleichmäßig in $z \in A_{R,r}(z_0)$ absolut konvergente Reihenentwicklung

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z - z_0)\left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} .$$

Vertauschen von Summation und Integration ist daher möglich und ergibt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n d\zeta \cdot (z - z_0)^{-n-1}\right),$$

wie gewünscht.

Falls z_0 Polstelle von f ist der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$, so folgt mit der Darstellung $f(z) = g(z)/(z - z_0)^{n_0}$ gemäß Satz 4.1.1. i) und Satz 3.3.2 für $n \geq n_0$

$$\int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n d\zeta = \int_{\partial B_r(z_0)} g(\zeta)(\zeta - z_0)^{n - n_0} d\zeta = 0 ,$$

da $G_n(z) = g(z)(z - z_0)^{n - n_0}$ holomorph in $B_r(z_0)$, $n \geq n_0$.

$\square$

4.2 Meromorphe Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

Def. 4.2.1. f ist *meromorphe* Funktion auf Ω, falls es eine höchstens abzählbare Menge von Punkten $(z_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in Ω gibt mit

i) $f : \Omega \setminus \{z_k;\, k \in \mathbb{N}_0\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph;

ii) f hat eine Polstelle bei z_k, $k \in \mathbb{N}_0$.

Bem. 4.2.1. Führen wir auf $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Topologie $\tau_{\overline{\mathbb{C}}}$ ein der Mengen U mit

i) $\infty \notin U \Rightarrow U \subset \mathbb{C}$ offen,

ii) $\infty \in U \Rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus U$ ist kompakt,

so sind meromorphe Funktion f auf Ω stetige Funktionen $\Omega \to \overline{\mathbb{C}}$.

Der Fall $\Omega = \mathbb{C}$ ist von besonderem Interesse.

<u>Def.</u> 4.2.2. Eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt eine <u>ganze</u> <u>Funktion</u>.

Das Verhalten im Unendlichen kann man durch Betrachten von

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

analog zu Def. 4.1.1 klassifizieren.

<u>Def.</u> 4.2.3. Eine Funktion $f: \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ heißt <u>meromorph</u>, falls für ein $R > 0$ gilt

i) $f|_{B_{2R}(0)} : B_{2R}(0) \to \overline{\mathbb{C}}$ ist meromorph;

ii) $f|_{\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)}} : \mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)} \to \mathbb{C}$ ist holomorph

und

iii) $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) : B_{1/R}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ hat eine hebbare Singularität oder einen Pol an der Stelle $z_0 = 0$.

Bem. 4.2.2. i) Im Falle von einer meromorphen Funktion f wie in Def. 4.2.3 sprechen wir dann von einer hebbaren Singularität oder einer Polstelle im Unendlichen, je nachdem, ob $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität oder eine Polstelle der Funktion $F(z) = f(\frac{1}{z})$ ist.

ii) Mit der in Bem. 4.2.1 eingeführten Topologie ist eine meromorphe Funktion $f: \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine stetige Funktion $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.

Meromorphe Funktionen $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ lassen sich wie folgt klassifizieren.

Satz 4.2.1. Sei $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann ist f rational; d.h., $f = p/q$ mit Polynomen $p, q: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Bew.: Da f nach Definition außerhalb eines genügend großen Balles $B_R(0)$ holomorph, gibt es höchstens endlich viele Polstellen $z_0, \dots, z_K \in \mathbb{C}$ von f.

Mit Satz 4.1.1 erhalten die Darstellung

$$f(z) = \frac{b_{n_0}^{(0)}}{(z-z_0)^{n_0}} + \dots + \frac{b_1^{(0)}}{z-z_0} + f_0(z)$$

mit einer meromorphen Funktion $f_0 : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ mit Polstellen $z_1, \dots, z_K \in \mathbb{C}$. Durch Iteration erhalten wir

$$f(z) = \sum_{k=0}^{K} \left(\frac{b_{n_k}^{(k)}}{(z-z_k)^{n_k}} + \dots + \frac{b_1^{(k)}}{z-z_k} \right) + f_K(z)$$

mit einer meromorphen Funktion f_K mit noch höchstens einem Pol bei Unendlich.

Für

$$F_K(z) = f_K\left(\frac{1}{z}\right)$$

liefert wiederum Satz 4.1.1 die Darstellung

$$F_K(z) = \frac{b^{(\infty)}_{n_\infty}}{z^{n_\infty}} + \dots + \frac{b^{(\infty)}_1}{z} + G(z) \, ,$$

wobei $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, also

$$g(z) = G\left(\frac{1}{z}\right) = f_K(z) - b^{(\infty)}_1 z - \dots b^{(\infty)}_{n_\infty} z^{n_\infty}$$

holomorph und beschränkt.

Mit Kor. 3.4.4 (Liouville) folgt $g \equiv b^{(\infty)}_0 \in \mathbb{C}$,

also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{K} \left(\frac{b^{(k)}_{n_k}}{(z-z_k)^{n_k}} + \dots + \frac{b^{(k)}_1}{z - z_k} \right)$$

$$+ b^{(\infty)}_0 + b^{(\infty)}_1 z + \dots + b^{(\infty)}_{n_\infty} z^{n_\infty}$$

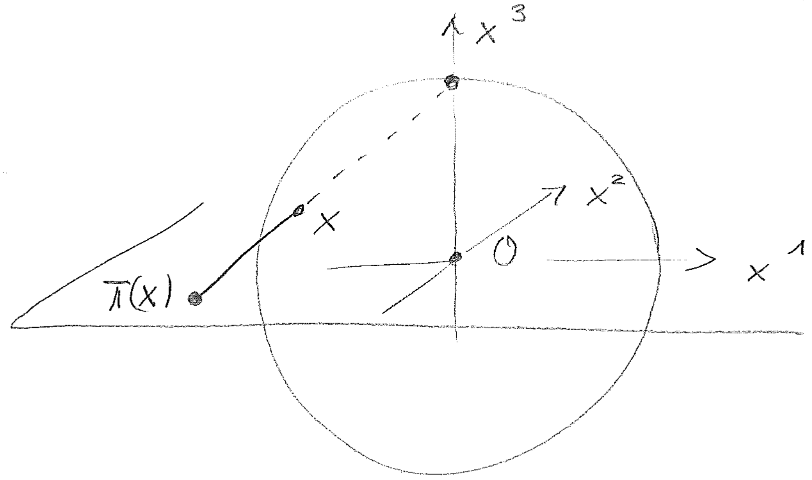
rational.

$\square$

Die Riemannsche Zahlenkugel. Mittels der stereographischen Projektion

$$\pi: \; S^2 = \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 ; \; |x| = 1\} \to \overline{\mathbb{C}}$$

$$x \longmapsto z = \frac{x^1 + i x^2}{1 - x^3}$$



mit der Inversen

$$\Phi: \mathbb{C} \ni z = x + iy \longmapsto \frac{1}{1+|z|^2}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ |z|^2 - 1 \end{pmatrix} \in S^2,$$

stetig im Punkt $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ ergänzt durch

$$\Phi(\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = N \in S^2,$$

können wir die erweiterte komplexe Ebene mit der Standardsphäre identifizieren, und π, Φ sind stetig bzgl. der in Bem. 4.2.1 eingeführten Topologie.

Für eine meromorphe Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist dann die induzierte Funktion

$$\tilde{f} = \Phi \circ f \circ \pi : S^2 \to S^2$$

stetig.

"Die Riemann-Sphäre S^2 ist die 1-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$."

4.3 Das Argumentprinzip.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$ mit $f(z_0) \neq 0$.

Für $z \in \Omega$ nahe bei z_0 ist dann

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$$

bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ erklärt. Treffen wir eine Wahl für $\arg f(z_0)$, so können wir durch die Forderung der Stetigkeit für genügend kleine $r > 0$ eine holomorphe Funktion $\phi: \Omega \cap B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ erklären mit

$$\phi(z) = \log f(z), \quad z \in \Omega \cap B_r(z_0),$$

und

$$\phi'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in \Omega \cap B_r(z_0),$$

ist unabhängig von der Wahl des Arguments von $f(z)$.

<u>Bem.</u> 4.3.1. i) Falls $f_1, f_2 : \Omega \xrightarrow{\text{holom.}} \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so gilt

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2};$$

analog für $f_1, \dots, f_K : \Omega \xrightarrow{\text{holom.}} \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Obwohl also für den (Hauptzweig des) Logarithmus im Allgemeinen das Additionstheorem

$$\log(f_1 f_2) = \log f_1 + \log f_2$$

nicht gilt, verhält sich die logarithmische Ableitung so, als wäre dies der Fall.

ii) Falls f an der Stelle z_0 einen Pol hat der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n_0}}, \quad z \in \Omega, \; z \neq z_0,$$

mit einer holomorphen Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$, so gilt gemäß i) für $0 < r << 1$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad z \in B_r(z_0) \cap \Omega \setminus \{z_0\}.$$

iii) Analog erhalten wir für

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$$

mit einer Nullstelle der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$ bei $z_0 \in \Omega$ und einer holomorphen Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ die Gleichung

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad z \in B_r(z_0) \cap \Omega, \; z \neq z_0,$$

für $r > 0$ mit $g(z) \neq 0$ auf $B_r(z_0) \cap \Omega$.

Zusammen mit Satz 4.1.2 liefert Bem. 4.3.1 das folgende Ergebnis.

<u>Satz</u> 4.3.1 (Argumentprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ meromorph, und sei $\mathcal{U}$ beschränkt mit $\overline{\mathcal{U}} \subset \Omega$ und so, daß f weder Polstellen noch Nullstellen auf $\partial\mathcal{U}$ besitzt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{U}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{z_k \in \mathcal{U} \\ \text{ist Nullstelle von } f \\ \text{der Ordnung } n_k \in \mathbb{N}}} n_k - \sum_{\substack{z_j \in \mathcal{U} \\ \text{ist Polstelle von } f \\ \text{der Ordnung } m_j}} m_j .$$

Bem.: Für $0<r<<1$ betrachte

$$\mathcal{U}_r = \mathcal{U} \setminus \bigcup_{z_k \in Z} B_r(z_k) \quad ,$$

wobei

$$Z = \{ z_0 \in \mathcal{U};\ f(z_0) = 0 \text{ oder } \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} |f(z)| = \infty \}.$$

Da $F := f'/f$ in einer Umgebung von $\mathcal{U}_r$ holomorph ist, gilt gemäß Kor. 3.4.1

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{U}_r} \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{U}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \sum_{z_k \in Z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_k)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

und gemäß Satz 4.1.2 und Bem. 4.3.1 gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_k)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n_k \in \mathbb{Z},$$

falls z_k Nullstelle der Ordnung n_k, bzw. Polstelle der Ordnung $-n_k$ ist, und falls $r>0$ so klein gewählt ist, daß $G(z) = \frac{g'(z)}{g(z)} : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ wie in Bem. 4.3.1 holomorph ist in einer Umgebung von $\overline{B_r(z_0)}$. $\square$

Satz 4.3.2 (Rouché) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, und für $B = B_R(z_0)$ mit $\overline{B} \subset \Omega$ gelte

$$\forall z \in \partial B : |f(z)| > |g(z)|.$$

Dann haben f und die Funktion $f+g$ dieselbe Anzahl Nullstellen (mit Multiplizität) in B.

Bew.: Für $0 \le t \le 1$ betrachte

$$f_t(z) = f(z) + t g(z), \quad z \in \Omega.$$

Mit $|f(z)| > |g(z)| \ge 0$ für $z \in \partial B$ folgt

$$\forall z \in \partial B : |f_t(z)| > 0, \quad 0 \le t \le 1,$$

und gemäß Satz 4.3.1 ist

$$n_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} \, dz \in \mathbb{N}_0$$

die Anzahl der Nullstellen (mit Multiplizität) von f_t in B. Da aufgrund der Definition n_t stetig von $0 \le t \le 1$ abhängt, folgt $n_1 = n_0$. $\square$

Anwendung von Satz 4.3.2 führt auf einen einfachen Beweis der folgenden Aussage.

<u>Lemma</u> 4.3.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, nicht konst. mit $f'(z_0) = 0$, $w_0 = f(z_0)$. Dann gibt es $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ und $\delta > 0$ so, daß jedes $w \in B_\delta(w_0)$ mindestens zwei verschiedene Urbilder $z_1, z_2 \in B_r(z_0)$ besitzt.

<u>Bew.</u>: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle z_0 der Funktion $z \mapsto f(z) - w_0$. Schreibe

$$f(z) - w_0 = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$=: a_{n_0} (z - z_0)^{n_0} + G(z)$$

mit $a_{n_0} = f^{(n_0)}(z_0)/n_0! \neq 0$. Wähle $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ und

$$\sup_{z \in \partial B_r(z_0)} |G(z)| < \frac{1}{2} |a_{n_0}| r^{n_0} =: \delta_0 .$$

Für $w \in \mathbb{C}$ mit $|w - w_0| < \delta_0$ betrachte

$$F(z) = w_0 - w + a_{n_0}(z - z_0)^{n_0},$$

so daß

$$f(z) - w = F(z) + G(z),\ z \in B_r(z_0).$$

Nach Wahl von $r > 0$ und w gilt

$$|F(z)| \geq |a_{n_0}| r^{n_0} - |w - w_0|$$

$$> \delta_0 \geq |G(z)|\ ,\ z \in \partial B_r(z_0).$$

Gemäß Satz 4.3.2 haben F und $F + G = f - w$ dieselbe Anzahl Nullstellen (mit Multiplizität), nämlich n_0, die Anzahl Nullstellen von F. Wäre für $w_k \xrightarrow{(k\to\infty)} w_0$, $w_k \in B_{\delta_0}(w_0)$, die Nullstelle $z_k \in B_r(z_0)$ von $f - w_k$ von einer Ordnung > 1 und damit $f'(z_k) = 0$, so wäre nach Kor. 3.4.3 $f|B_r(z_0)$ konstant, und f nicht injektiv.[1)]

Also hat jedes w genügend nahe bei w_0 mindestens zwei verschiedene Urbilder.

□

---

1) Die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B_r(z_0)$ hat einen Häufungspunkt $z \in \overline{B_r(z_0)}$.

Kor. 4.3.1 (Offenheit holomorpher Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zshg, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, $U \subset \Omega$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

Bew.: Sei $w_0 = f(z_0)$, $z_0 \in U$.
Falls $f'(z_0) \neq 0$, so folgt die Behauptung aus dem Umkehrsatz, Satz 2.4.1.

Falls $f'(z_0) = 0$, so folgt mit Lemma 4.3.1, daß $f(U)$ eine offene Umgebung von w_0 enthält. $\square$

Kor. 4.3.2 (Biholomorphiesatz)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann gilt $f'(z) \neq 0$ für jedes $z \in \Omega$, und f ist eine biholomorphe Abbildung von Ω auf $\tilde{\Omega} := f(\Omega)$.

Bew.: (OBdA $\Omega \neq \emptyset$.) Da $f : \Omega \to \mathbb{C}$ injektiv, ist f nicht konstant, und $f'(z) \neq 0$ für $z \in \Omega$ folgt mit Lemma 4.3.1.

Gemäß dem Umkehrsatz (Satz 2.4.1) ist f lokal biholomorph, die (aufgrund der Injektivität von f wohldefinierte) Umkehrfunktion $f^{-1} : \tilde{\Omega} \to \Omega$ also holomorph.

$\square$