

5. Der allgemeine Cauchysche Integralsatz

5.1 Homotopien, einfach zslg. Gebiete

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1], \Omega)$

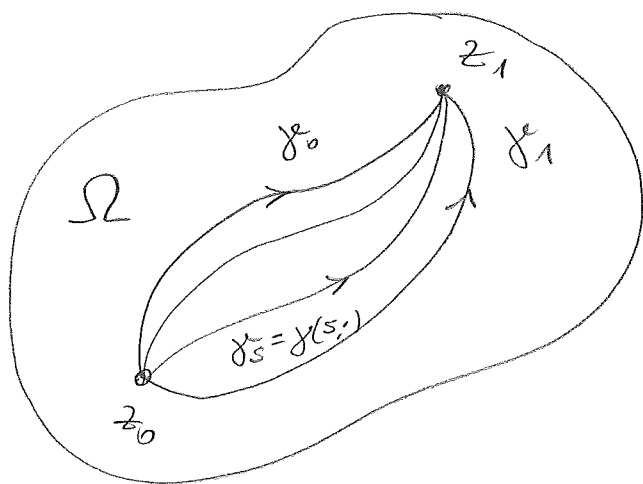
mit

$$\gamma_0(0) = z_0 = \gamma_1(0), \quad \gamma_0(1) = z_1 = \gamma_1(1).$$

Def. 5.1.1. i) γ_0 und γ_1 heißen zu einander homotop (bei festen Endpunkten), falls $\gamma \in C^0([0,1] \times [0,1], \Omega)$ existiert mit

$$\gamma(0,t) = \gamma_0(t), \quad \gamma(1,t) = \gamma_1(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\gamma(s,0) = z_0, \quad \gamma(s,1) = z_1, \quad 0 \leq s \leq 1.$$



ii) Falls $\gamma_0, \gamma_1 \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$,
so heißt γ eine

C^k -Homotopie, falls $\gamma \in C^k$
insbesondere gilt dann:

$$\forall s \in [0,1]: \gamma_s = \gamma(s, \cdot) \in C^k,$$

$$s \mapsto \gamma_s \in C^k \text{ stetig.}$$

Bem. 5.1.1. Für homotope $\gamma_0, \gamma_1 \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$, gibt
es stets eine C^k -Homotopie.

Zum Beweis benutzen wir das Hilfsmittel der Faltung einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem glättenden Kern.

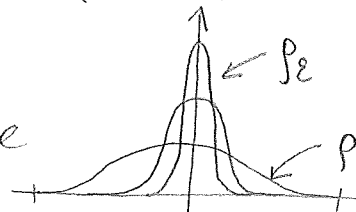
Sei dazu $0 \leq \rho = \rho(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(\rho) \subset B_1(0)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1,$$

Für $0 < \varepsilon < 1$ setze $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in C_c^\infty(B_\varepsilon(0)) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x) dx \stackrel{(y=\frac{x}{\varepsilon})}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy = 1 \quad (5.1.1)$$

und zu gegebenem $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ setze



$$(f * \rho_\varepsilon)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \rho_\varepsilon(y) dy \quad (5.1.2)$$

$$\stackrel{(z=x-y)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \rho_\varepsilon(x-z) dz \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

mit $d(f * \rho_\varepsilon) = (df * \rho_\varepsilon)$ wegen (5.1.2) und mit

$$\begin{aligned} \|f * \rho_\varepsilon - f\|_{C^0} &\stackrel{(5.1.1)}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \rho_\varepsilon(y) dy \right| \\ (5.1.3) \quad &\leq \underbrace{\sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ |y| < \varepsilon}} |f(x-y) - f(x)|}_{\rightarrow 0 \ (\varepsilon \downarrow 0)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y) dy}_{=1, \geq 0} \end{aligned}$$

da $\text{supp}(f)$ nach Annahme kompakt, f also gleichmäßig stetig, analog für die Ableitung df .

Bew. von Bew. 5.1.1. Nach Umparametrisierung

$\tilde{\gamma}_0(t) = (\gamma_0 \circ \varphi)(t)$, etc, mit $\varphi \in C^1([0,1], [0,1])$, wo

$\varphi' \geq 0$, $\varphi(t) = 0$ für $t \leq \varepsilon_0$, $\varphi(t) = 1$ für $t \geq 1 - \varepsilon_0$

für eine Zahl $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, dürfen wir annehmen,

daß gilt

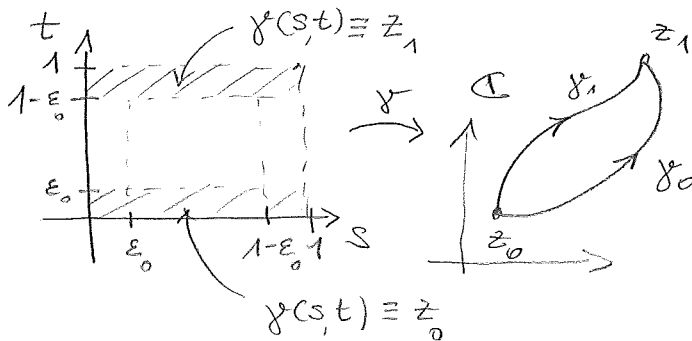
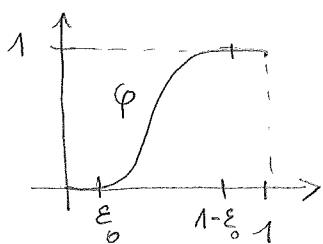
$$\gamma_{0,1}(t) = \gamma_{0,1}(0) = z_0 \quad \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon_0,$$

$$\gamma_{0,1}(t) = \gamma_{0,1}(1) = z_1 \quad \text{für } 1 - \varepsilon_0 \leq t \leq 1,$$

sowie

$$\gamma(s, \cdot) = \gamma_0 \quad \text{für } 0 \leq s \leq \varepsilon_0,$$

$$\gamma(s, \cdot) = \gamma_1 \quad \text{für } 1 - \varepsilon_0 \leq s \leq 1.$$



Sei $0 \leq \rho = \rho(s,t) \in C_c^\infty(\mathbb{B}_1(0))$ ein glätthender Kern.

Für $0 < 2\varepsilon \leq \varepsilon_0$ glätte zunächst $\gamma_0^\varepsilon \equiv \gamma_s^\varepsilon = \gamma(s, \cdot)$, $0 \leq s \leq \varepsilon_0$,

durch

$$\gamma_0^{(\varepsilon)}(s,t) = (\gamma_0 * \rho_\varepsilon)(s,t), \quad 0 \leq s \leq \varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon.$$

Da $\gamma_0 \in C^1$, folgt mit (5.1.2) auch
 $\gamma_s^{(\varepsilon)} = \gamma^{(\varepsilon)}(s, \cdot) \in C^1$ für $0 \leq s \leq \varepsilon$, und
 (5.1.3) ergibt $\gamma_s^{(\varepsilon)} \Rightarrow \gamma_0$ in C^1 für $s \downarrow 0$.

(Betrachte $f = \gamma_0$, bzw. $f = \dot{\gamma}_0$.)

Analog glätten wir $\gamma_1 = \gamma_s$, $1 - \varepsilon_0 \leq s \leq 1$,
 indem wir setzen

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s, t) = (\gamma_1 * \rho_{1-s})(s, t), \quad \varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon \leq s \leq 1.$$

Weiter setzen wir

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s, t) = z_0, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon,$$

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s, t) = z_1, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 1 - \varepsilon \leq t \leq 1,$$

und schließlich

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s, t) = (\gamma * \rho_\varepsilon)(s, t), \quad \varepsilon \leq s, t \leq 1 - \varepsilon,$$

um die gewünschte C^1 -Homotopie zu erhalten.

Der Cauchy'sche Integralsatz (Satz 3.3.2) liefert das folgende Resultat.

Satz 5.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und seien $\gamma_0, \gamma_1 \in C^1([0,1]; \Omega)$ homotop bei festen Endpunkten. Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Bew.: Sei $\gamma \in C^0([0,1]^2; \Omega)$ eine C^1 -Homotopie von γ_0 zu γ_1 . Da

$$K = \gamma([0,1]^2) \subset \Omega$$

kompakt, gibt es $r > 0$ mit

$$\text{dist}(K, \partial\Omega) > r,$$

und endlich viele Bälle $B_r(z_l)$, $1 \leq l \leq L$, mit $z_l \in K$, so daß $\overline{B_r(z_l)} \subset \Omega$, $1 \leq l \leq L$, überdecken K .

Für $0 \leq s \leq 1$ setze $\gamma_s(t) := \gamma(s,t)$ mit $\gamma_s \in C^1([0,1]; \Omega)$, und definiere

$$F(s) := \int_{\gamma_s} f(z) dz \in \mathbb{C}.$$

Beh.: $F(s) = F(0) = \int_{\gamma_0} f(z) dz$ für $0 \leq s \leq 1$.

Bew.: Setze

$$I = \{s \in [0, 1]; F(s) = F(0)\}.$$

Dann gilt $0 \in I$; also $I \neq \emptyset$.

Da $s \mapsto \gamma_s \in C^1$ nach Voraussetzung stetig ist, ist auch die Abbildung

$$s \mapsto F(s) = \int_0^1 f(\gamma_s(t)) \dot{\gamma}_s(t) dt$$

stetig; I ist also auch abgeschlossen.

Sei schließlich $s_0 \in I$. Wir zeigen:

$$\exists \delta > 0 \forall 0 \leq s \leq 1: |s - s_0| < \delta \Rightarrow F(s) = F(s_0) = F(0).$$

Sei dazu

$$\text{im}(\gamma_{s_0}) = \gamma_{s_0}([0, 1]) \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} \mathcal{B}_r(z_i),$$

wobei für $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{i_0} = 1$ gelte

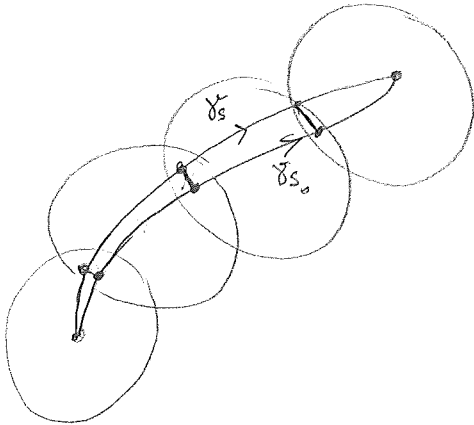
$$(5.1.1) \quad \gamma_{s_0}([t_{i-1}, t_i]) \subset \mathcal{B}_r(z_i), \quad 1 \leq i \leq i_0$$

und damit insbesondere

$$(5.1.2) \quad \gamma_{s_0}(t_i) \in \mathcal{B}_r(z_i) \cap \mathcal{B}_r(z_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq i_0.$$

(Die Punkte z_i , $1 \leq i \leq i_0$, sind nicht unbedingt paarweise verschieden.)

Da $B_r(z_i)$ offen für jedes i , gibt es $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, daß für alle $s \in [0, 1]$ mit $|s - s_0| < \delta$ die Beziehungen (5.1.1), (5.1.2) auch gelten für γ_s .



Da $B_r(z_i) \cap B_r(z_{i+1})$ konvex können wir für jedes $1 \leq i \leq i_0$ die Bögen

$$\gamma_{s_0}|_{[t_{i-1}, t_i]}, \gamma_s|_{[t_{i-1}, t_i]}$$

durch Hinzunahme der

geraden Verbindungsstrecken $\gamma^{(i-1)}$, bzw. $\gamma^{(i)}$, wobei

$$\gamma^{(j)}(t) = t \gamma_s(t_j) + (1-t) \gamma_{s_0}(t_j), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

zu geschlossenen Kurven

$$\Gamma_i = \gamma_{s_0}|_{[t_{i-1}, t_i]} + \gamma^{(i)} - \gamma_s|_{[t_{i-1}, t_i]} - \gamma^{(i-1)}$$

in $B_r(z_i)$ ergänzen. Mit Satz 3.3.2 folgt

$$\bar{F}(s_0) - \bar{F}(s) = \int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^{i_0} \int_{\Gamma_i} f(z) dz = 0.$$

Also ist I auch offen, und damit $I = [0, 1]$. \square

Def. 5.1.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt Ω einfach zusammenhängend (1-zshg.), falls je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1]; \Omega)$ mit denselben Endpunkten zueinander homotop sind.

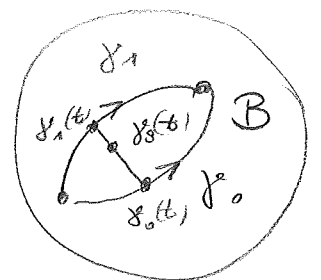
Bem. 5.1.2. i) Insbesondere ist in einem 1-zshg. Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ dann jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([0,1]; \Omega)$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$ homotop zum konstanten Weg $\gamma_0(t) = z_0, 0 \leq t \leq 1$; d.h. jede geschlossene Kurve ist "zusammenziehbar".
 ii) Umgekehrt gilt: Ist jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([0,1]; \Omega)$ zusammenziehbar, so ist Ω 1-zshg.

Beisp. 5.1.1. i) Jeder Ball $B = B_R(z_0)$ ist 1-zshg.

Bew.: Für je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1]; B)$ mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ ist $\gamma \in C^0([0,1]^2; B)$

mit $\gamma(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$

eine Homotopie von γ_0 nach γ_1



ii) Allgemeiner zeigt der Beweis von i), daß jedes konvexe Gebiet Ω 1-zshg. ist.

iii) Das Gebiet $\Omega = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0])$ ist 1-zshg, da

$$\Phi:]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\ni (r, \theta) \mapsto r e^{i\theta} \in \Omega$$

einen Homöomorphismus von Ω auf ein 1-zshg. Gebiet definiert.

iv) Die Menge $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht 1-zshg.

Bew.: Andernfalls müßte nach Bem. 5.1.2.i) und Satz 5.1.1 für jede holomorphe Funktion f und jede geschlossene Kurve $\gamma \in C_{pw}^1([0,1], \Omega)$ gelten

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0;$$

jedoch erhalten wir für $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$, und $\gamma = \partial B_r(0)$, $r > 0$, gemäß Satz 3.4.1

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\partial B_r(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

Bem. 5.1.3. Sei $\gamma \in C_{pw}^1([0,1], \Omega)$

mit $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in C^1([t_{i-1}, t_i], \Omega)$, $1 \leq i \leq i_0$,

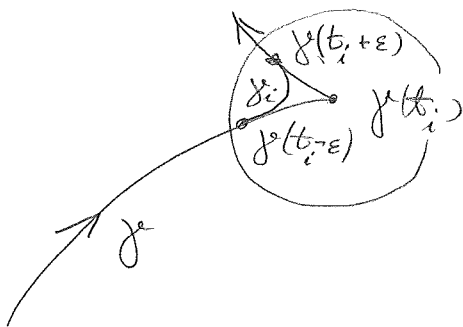
für $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{i_0} = 1$. Wir können γ in
einem Ball $B_i = B_{R_i}(\gamma(t_i)) \subset \bar{D}_i \subset \Omega$, $1 \leq i < i_0$,

durch einen glatten Bogen γ_i ersetzen mit

Endpunkten $\gamma_i(\pm 1) = \gamma(t_i \pm \varepsilon)$, $\dot{\gamma}_i(\pm 1) = \dot{\gamma}(t_i \pm \varepsilon)$, $1 \leq i < i_0$.

Für $1 \leq i < i_0$ gilt dann gemäß Satz 3.3.2

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz = \int_{\gamma|_{[t_i-\varepsilon, t_i+\varepsilon]}} f(z) dz$$



und daher auch

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz,$$

wo $\tilde{\gamma} \in C^1([0,1], \Omega)$ die so erhaltene

Kurve mit $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$, $\tilde{\gamma}(1) = \gamma(1)$.

Satz 3.1.1 und Satz 5.1.1 ergeben sofort das folgende Resultat.

Satz 5.1.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

Bew.: Nach Satz 5.1.1 und Bem. 5.1.3 ist für jedes $\gamma \in C_{pw}^1([0,1]; \Omega)$ das Integral $\int_{\gamma} f(z) dz$ nur abhängig von den Endpunkten von γ , und Satz 3.1.1 liefert das gewünschte F . □

Insbesondere erhalten wir

Kor. 5.1.1 (Cauchy) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und 1-zshg, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma \in C_{pw}^1([0,1]; \Omega)$ geschlossen. Dann gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

5.2 Der komplexe Logarithmus

Auf jedem 1-zshg., offenen $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $1 \in \Omega$ können wir einen "Zweig" des komplexen Logarithmus einführen.

Satz 5.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg. und mit $1 \in \Omega$, $0 \notin \Omega$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion $F(z) = \log_{\Omega}(z)$, $z \in \Omega$, mit

- i) $e^{F(z)} = z$, $z \in \Omega$,
- ii) $F(1) = 0$.

Bew.: Für $z \in \Omega$ setze

$$F(z) := \int_{\gamma} \frac{dz}{z},$$

wobei $\gamma \in C^1([0, 1]; \Omega)$ ein beliebiger Weg ist mit $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = z$.

Da Ω nach Annahme 1-zshg mit $\partial \notin \Omega$, ist F wohldefiniert, und wie im Beweis von Satz 3.1.1. ist F holomorph mit

$$F'(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \Omega.$$

Nach Konstruktion gilt $F(1) = 0$.

Weiter gilt

$$\frac{d}{dz} (z e^{-F(z)}) = e^{-F(z)} (1 - z F'(z)) = 0;$$

also

$$z e^{-F(z)} = 1 e^{-F(1)} = 1, \quad z \in \Omega.$$

□

Bew. 5.2.1. i) Für $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

erhalten wir mittels Satz 5.2.1 den bereits früher angeführten Hauptzweig des Logarithmus zurück.

ii) Für ein offenes 1-zweig. $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$
 mit $1 \in \Omega$ und ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$
 können wir nun die allgemeinere Potenz

$$z^\alpha := \exp\left(\alpha \log_\Omega(z)\right), \quad z \in \Omega,$$

eingeführen. Diese ist jedoch stets
 abhängig vom gewählten Gebiet Ω .

iii) Vorsicht ist jedoch geboten bei der
 Anwendung der üblichen Rechenregeln!

z.B. gilt für den Hauptzweig des Logarithmus
 bei Wahl von $z_1 = z_2 = e^{2\pi i/3}$, $z_1 z_2 = e^{4\pi i/3} = e^{-2\pi i/3}$

nach Definition

$$\log(z_1 z_2) = -2\pi i/3 \neq \log(z_1) + \log(z_2) = 4\pi i/3$$

Somit gilt auch

$$(z_1 z_2)^i = \exp\left(i \log(z_1 z_2)\right) = e^{2\pi/3},$$

während $z_1^i = \exp(i \log z_1) = e^{-2\pi/3}$

also $z_1^i \cdot z_2^i = e^{-4\pi/3} \neq (z_1 z_2)^i$.

Satz 5.2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zellig,
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Dann
 gibt es $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit
 $e^{g(z)} = f(z), z \in \Omega.$

Bem. 5.2.2. g ist eindeutig bis
 auf Vielfache von $2\pi i$ bestimmt
 und definiert einen Zweig der
 Funktion $\log(f(z)), z \in \Omega.$

Bew. von Satz 5.2.2: Fixiere $z_0 \in \Omega.$
 Für $z \in \Omega$ setze

$$g(z) := \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + c_0$$

" = $(\log f)'(z)$ "

wobei $\gamma \in C_{pw}^1([0,1], \Omega)$ eine beliebige
 Kurve ist von $\gamma(0) = z_0$ nach $\gamma(1) = z,$
 und mit zu bestimmendem $c_0 \in \mathbb{C}.$

Wie im Beweis von Satz 3.1.1 ist

$g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert und holomorph
mit

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in \Omega,$$

so daß

$$\frac{d}{dz} \left(f(z) e^{-g(z)} \right) = e^{-g(z)} \underbrace{\left(f'(z) - f(z)g'(z) \right)}_{=0} = 0.$$

Es folgt

$$f(z) e^{-g(z)} = f(z_0) e^{-c_0}, \quad z \in \Omega.$$

Wähle $c_0 \in \mathbb{C}$ mit $e^{c_0} = f(z_0)$. \square

5.3 Pauze Funktionen

Gibt es eine Beziehung zwischen den Nullstellen einer holomorphen Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und ihrem Verhalten

für $|z| \rightarrow \infty$? Kann man f aus seinen

Nullstellen wie ein Polynom durch Zerlegung in Linearfaktoren (bis auf einen Faktor in \mathbb{C}) rekonstruieren?

Satz 5.3.1 (Jensen) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen,

$B = B_{\mathbb{R}}(0) \subset \bar{B} \subset \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für $z \in \partial B$, $f(0) \neq 0$. Dann

gilt

$$\log |f(0)| = \sum_{k=1}^K \log \left(\frac{|z_k|}{R} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta,$$

wobei z_1, \dots, z_K die Nullstellen von f in B bezeichnet und jede Nullstelle entsprechend ihrer Multiplizität n_k -mal in der Aufzählung erscheint.

Eine wichtige Rolle beim Beweis spielt der Cauchy'sche Darstellungssatz in der folgenden Form.

Satz 5.3.2 (Mittelwerteigenschaft)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $B = B_R(0) \subset \overline{B} \subset \Omega$,

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$(5.3.1) \quad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) d\theta.$$

Falls weiter $f = u + iv$ mit $u = \operatorname{Re}(f)$,
so gilt

$$(5.3.2) \quad u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) d\theta.$$

Bew.: Nach Satz 3.4.1 gilt mit

$$\gamma(t) = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) dt, \end{aligned}$$

also (5.3.1). Die Formel (5.3.2) folgt nach
"Übergang zum Realteil in (5.3.1). □

Weiter benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 5.3.1, Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$,

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - ae^{i\theta}| d\theta = 0.$$

Bew.: Die Funktion $f(z) = 1 - az$, $z \in \mathbb{C}$, ist holomorph mit $f(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$.

Also gibt es $R > 1$ mit $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{B}_R(0)$.

Nach Satz 5.2.2 gibt es $g: \mathbb{B}_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = e^{g(z)}$, $z \in \mathbb{B}_R(0)$,

und

$$\log |f(z)| = \log (e^{\operatorname{Re}(g(z))}) = \operatorname{Re}(g(z)).$$

Mit (5.3.2) folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log |1 - ae^{i\theta}| d\theta &= \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(g(e^{i\theta})) d\theta = 2\pi \operatorname{Re}(g(0)) \\ &= 2\pi \log \underbrace{|f(0)|}_{=1} = 0. \end{aligned}$$

□

Bew. von Satz 5.3.1: Wir beweisen den Satz in 4 Schritten.

i) Nimm an, der Satz gilt für f_1 und f_2 .
Da $f = f_1 f_2$ genau dort verschwindet, wo entweder f_1 oder f_2 verschwindet, und da

$$\log |f_1 f_2| = \log |f_1| + \log |f_2|$$

für den reellen Logarithmus, folgt die Aussage für $f = f_1 f_2$.

ii) Falls $z_1, \dots, z_k \in B$ die Nullstellen von f mit Multiplizität bezeichnet, so hat die holomorphe Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1) \cdots (z-z_k)}, \quad z \in U \setminus \{z_1, \dots, z_k\},$$

wo $U \subset \Omega$ eine offene Umgebung von B , hebbare Singularitäten bei z_1, \dots, z_k ; also

$$f(z) = (z-z_1) \cdots (z-z_k) g(z)$$

mit holomorphem $g: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

iii) O.B.d.A. dürfen wir annehmen,
daß U 1-zshg. Nach Satz 5.2.2
gibt es $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph
mit $g = e^h$; insbesondere gilt

$$|g(z)| = e^{\operatorname{Re}(h(z))}, \quad z \in U,$$

und mit (5.3.2) folgt

$$\begin{aligned} \log |g(0)| &= \operatorname{Re}(h(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(h(Re^{i\theta})) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(Re^{i\theta})| d\theta. \end{aligned}$$

iv) Fixiere $1 \leq k \leq \kappa$. Für $f_k(z) = z - z_k, z \in \mathbb{C}$,
gilt nach Lemma 5.3.1

$$\int_0^{2\pi} \log |f_k(Re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log |Re^{i\theta} - z_k| d\theta$$

$$= 2\pi \log R + \int_0^{2\pi} \log \left| e^{i\theta} - \underbrace{\frac{z_k}{R}}_{=: a \in \mathbb{B}_1(0)} \right| d\theta$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(z=i\theta)}{=} 2\pi \log R - \underbrace{\int_0^{2\pi} \log |1 - ae^{it}| dt}_{=0} = 2\pi \log R. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\log |f_k(0)| = \log |z_k| =$$

$$= \log \left(\frac{|z_k|}{R} \right) + \log R$$

$$= \log \left(\frac{|z_k|}{R} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_k(R e^{i\theta})| d\theta.$$

Mit i) - iii) liefert dies die Aussage
des Satzes. □

Für holomorphes $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $r > 0$ sei

$$n(r) = n_f(r) = \# \{z \in \mathbb{D}_r(0); f(z) = 0\},$$

wobei jede Nullstelle mit ihrer Multiplizität
gezählt wird.

Lemma 5.3.2. Für $R > 0$ gilt

$$\int_0^R n(r) \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^K \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right),$$

falls $f(0) \neq 0$, wobei $z_1, \dots, z_K \in \mathbb{B}_R(0)$ die Nullstellen von f mit Multiplizität bezeichnet.

Bew.: Für $1 \leq k \leq K$ gilt

$$\int_{|z_k|}^R \frac{dr}{r} = \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right).$$

Mit $\chi_k(r) = \begin{cases} 1, & r > |z_k| \\ 0, & r \leq |z_k| \end{cases}$, $1 \leq k \leq K$,

folgt $n(r) = \sum_{k=1}^K \chi_k(r)$, $0 < r < R$, also

$$\begin{aligned} \int_0^R n(r) \frac{dr}{r} &= \sum_{k=1}^K \int_0^R \chi_k(r) \frac{dr}{r} \\ &= \sum_{k=1}^K \int_{|z_k|}^R \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^K \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right). \end{aligned}$$

□

Def. 5.3.1: Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $\rho > 0$.

i) Die Funktion f hat Wachstumsordnung $\leq \rho$, falls gilt

$$\exists A, B > 0 \forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq A \exp(B|z|^\rho).$$

ii) Die Ordnung des Wachstums von f ist dann

$$\rho_f := \inf \{ \rho > 0; f \text{ hat Wachstumsordnung } \leq \rho \}.$$

Beisp. 5.3.1. Für $f(z) = e^{z^2}$, $z \in \mathbb{C}$, gilt $\rho_f = 2$.

Satz 5.3.3. Sei f ganz mit $\rho_f < \rho$. Dann gilt

$$i) \exists C > 0 \forall r > 1 : n(r) \leq Cr^\rho.$$

ii) Sind z_1, z_2, \dots die Nullstellen $z_k \neq 0$ von f mit Multiplizität, so gilt für jedes $s > \rho$, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s} < \infty.$$

Bew.: i) O.B.d.A. dürfen wir annehmen, daß $f(0) \neq 0$.

Betrachte sonst die holomorphe Funktion

$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = f(z)/z^{n_0}$, wobei $n_0 \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$ ist, mit $\rho_g \leq \rho_f$.
Mit $n_g(r) \leq Cr^\rho$ folgt dann auch i) für f .

Mit Lemma 5.3.2 und Satz 5.3.1 erhalten wir für ganzes f mit $f(0) \neq 0$ für $R > 0$ mit $f(z) \neq 0$ für $|z| = R$ die Identität

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta &= \log |f(0)| \\ &= - \sum_{k=1}^{\kappa} \log \left| \frac{z_k}{R} \right| = \sum_{k=1}^{\kappa} \log \left(\frac{R}{|z_k|} \right) = \int_0^R n(s) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Da $n(s) \geq 0$, folgt für $R = 2r$ somit

$$\int_r^{2r} n(s) \frac{ds}{s} \leq \int_0^{2r} n(s) \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|,$$

$$\text{und} \quad \int_r^{2r} n(s) \frac{ds}{s} \geq n(r) \int_r^{2r} \frac{ds}{s} = \log 2 \cdot n(r),$$

da $n(r)$ nicht fallend,

Die Wachstumsannahme $\rho_f < \rho$ ergibt andererseits

$$\log |f(Re^{i\theta})| \leq \log (A \exp(BR^\rho)) \leq CR^\rho, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

für genügend großes $R \geq R_0 \geq 2$. Mit $R = 2r$ folgt

$$n(r) \leq Cr^\rho, \quad r \geq r_0 \geq 1.$$

ii) Da es wegen Kor. 3.4.2 höchstens endlich viele Nullstellen z_k mit $|z_k| \leq 1$ gibt, genügt es, $\sum_{|z_k| \geq 1} |z_k|^{-s}$ abzuschätzen. Dies gelingt mit i) mittels dyadischer Zerlegung

$$\begin{aligned} \sum_{|z_k| \geq 1} |z_k|^{-s} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{2^j \leq |z_k| < 2^{j+1}} |z_k|^{-s} \right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-sj} \underbrace{n(2^{j+1})}_{\leq C 2^{(j+1)\rho}} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(p-s)j} < \infty, \end{aligned}$$

da $2^{p-s} < 1$ für $s > p$. □

Beisp. 5.3.2. Die ganze Funktion

$$f(z) = \sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C},$$

hat Ordnung $\rho_f = 1$ und einfache Nullstellen genau bei $z_k = k, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Da } \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} |z_k|^{-s} = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \frac{1}{|k|^s} < \infty$$

genau dann gilt, wenn $s > 1$, sieht man, daß die Aussage von Satz 5.3.3. ii) nicht verbessert werden kann.

Eine erste Anwendung des Begriffs der Ordnung des Wachstums einer ganzen Funktion f ist die folgende Verallgemeinerung des Maximumprinzips für gewisse unbeschränkte Gebiete.

Satz 5.3.4 (Phragmén-Lindelöf)

Sei $S = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}; r > 0, |\theta| < \frac{\pi}{4}\}$,

und sei $f \in C^0(\bar{S}; \mathbb{C})$ holomorph in S mit $\rho_f \leq 1$ und mit

$$|f(z)| \leq 1, \quad z \in \partial S.$$

Dann gilt $|f(z)| \leq 1$ für jedes $z \in S$.

Bem. 5.3.1. Die Bedingung $\rho_f \leq 1$ ist notwendig, wie das Beispiel der Funktion

$f(z) = e^{z^2}$, $z \in \mathbb{C}$, zeigt. Es gilt

$$z^2 = r^2 e^{\pm i \frac{\pi}{2}} = \pm i r^2 \quad \text{für } z = r e^{\pm i \frac{\pi}{4}} \in \partial S;$$

also $|f(z)| = 1$ für $z \in \partial S$; jedoch gilt

$$e^{x^2} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty, x \in \mathbb{R}).$$

Siehe auch Übung

Bew. von Satz 5.3.4: Fixiere $1 < \alpha < 2$
 und für $0 < \varepsilon < 1$ betrachte die Funktion

$$f_\varepsilon(z) = f(z) e^{-\varepsilon z^\alpha}, \quad z \in \overline{S},$$

wobei $z^\alpha = \exp(\alpha \log(z))$ wie oben definiert
 mit dem Hauptzweig des Logarithmus.

Für $z = r e^{i\theta}$, $|\theta| \leq \pi/4$, gilt dann

$$\operatorname{Re}(z^\alpha) = r^\alpha \cos(\alpha\theta) \geq r^\alpha \cos(\alpha\pi/4).$$

mit $\cos(\alpha\pi/4) =: \beta > 0$. Da $\rho_f \leq 1$ folgt
 mit Konstanten $A, B > 0$ für $z \in S$:

$$|f_\varepsilon(z)| \leq |f(z)| e^{-\varepsilon\beta|z|^\alpha} \leq A e^{B|z|^{\frac{1+\alpha}{2}}} e^{-\varepsilon\beta|z|^\alpha} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0,$$

und es existiert $0 < R_\varepsilon \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \downarrow 0$) mit

$$|f_\varepsilon(z)| \leq 1 \quad \text{für } z \in \partial(S \cap B_{R_\varepsilon}(0)).$$

Da $f_\varepsilon \in C(\overline{S \cap B_{R_\varepsilon}(0)})$ holomorph in S' ,
 ergibt das Maximumprinzip für jedes $z_0 \in S$

$$1 \geq \sup_{z \in \partial(S \cap B_{R_\varepsilon}(0))} |f_\varepsilon(z)| \geq |f_\varepsilon(z_0)| = |f(z_0)| e^{-\varepsilon|z_0|^\alpha},$$

falls $\varepsilon > 0$ genügend klein, so daß $|z_0| < R_\varepsilon$. Da
 $z_0 \in S$ beliebig, folgt mit $\varepsilon \downarrow 0$ die Behauptung. \triangleleft

Pause Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen kann man z.B. durch Produktdarstellungen gewinnen.

Def. 5.3.2. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$$

konvergiert, falls $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1+a_n) =: A$ existiert, und $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) := A$.¹⁾

Lemma 5.3.3. Es gelte $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Dann konvergiert das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$, und

$$A := \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$$

ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren. Weiter ist $A = 0$ gdw. $1+a_{n_0} = 0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

Bew.: Mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ folgt die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : |a_n| < \frac{1}{2}.$$

¹⁾ Vgl. Shakarchi-Stein, S. 140.

i) Zunächst wollen wir annehmen $a_0 = 1$,
 und der Hauptzweig des Logarithmus
 ist für alle Terme $1+a_n$ definiert mit

$$1+a_n = \exp\left(\log(1+a_n)\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für $N \in \mathbb{N}$ folgt

$$\prod_{n=1}^N (1+a_n) = \exp\left(\sum_{n=1}^N \log(1+a_n)\right),$$

wobei

$$\log(1+a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + \frac{a_n^3}{3} - \dots$$

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-a_n)^k}{k};$$

also für $|a_n| \leq \frac{1}{2}$

$$|\log(1+a_n)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|^k = \frac{|a_n|}{1-|a_n|} \leq 2|a_n|,$$

Mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ folgt somit, daß die Reihe

$$B := \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$$

absolut konvergiert, unabhängig von der Summationsreihen-
 folge, und $\prod_{n=1}^N (1+a_n) \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} e =: \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$.

Insbesondere ist $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) = e^B \neq 0$.

ii) Falls allgemein $n_0 \in \mathbb{N}$, so existiert weiterhin $\prod_{n=n_0}^{\infty} (1+a_n) =: A_0$ und damit

auch

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) = A_0 \prod_{n=1}^{n_0-1} (1+a_n),$$

und

$$A = 0 \Leftrightarrow \exists 1 \leq u \leq n_0 : 1+a_u = 0.$$

□

Satz 5.3.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen,

$f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\forall z \in \Omega : |f_n(z) - 1| \leq c_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

für $c_n > 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. Dann

konvergiert $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren, und

$F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph.

Zudem gilt für $z \in \Omega$ mit $f_n(z) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}.$$

Bew.: i) Schreibe $f_n(z) = 1 + a_n(z)$

mit $|a_n(z)| \leq c_n$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \Omega$.

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n \geq n_0} c_n \leq \frac{1}{2}$,

und für $N \geq L \geq n_0$ schreibe $F_N(z) = \prod_{n=1}^N f_n(z)$,

$$F_N(z) - F_L(z) = \left(\prod_{n=L+1}^N f_n(z) - 1 \right) F_L(z).$$

Gemäß Lemma 5.3.3 existiert

$$F(z) = \lim_{L \rightarrow \infty} F_L(z), \quad z \in \Omega,$$

und

$$|F(z)|, |F_L(z)| \leq \prod_{n=1}^{n_0} (1 + c_n) \exp\left(2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n\right) =: C_0,$$

gleichmäßig in $z \in \Omega$, $L \in \mathbb{N}$; zudem ist F unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

Weiter gilt analog zum Beweis von Lemma 5.3.3

$$|\overline{F}_N(z) - \overline{F}_L(z)| \leq C_0 \left| \prod_{n=L+1}^N f_n(z) - 1 \right|$$

$$= C_0 \left| \prod_{n=L+1}^N (1 + a_n(z)) - 1 \right|$$

$$= C_0 \left| \exp\left(\sum_{n=L+1}^N \log(1 + a_n(z))\right) - 1 \right|$$

$$\leq C_0 \left| \exp\left(2 \underbrace{\sum_{n=L+1}^N c_n}_{\leq 1}\right) - 1 \right|$$

(Mittelwertsatz)

$$\leq 2e C_0 \sum_{n>L} c_n \rightarrow 0 \quad (N \geq L \rightarrow \infty),$$

gleichmäßig in $z \in \Omega$.

Nach Kor. 3.4.6 von Weierstrass ist \overline{F} holomorph in Ω , und $\overline{F}_N \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} \overline{F}$ lokal glän.

ii) Falls für ein $z_0 \in \Omega$ gilt $f_n(z_0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, so ergibt Stetigkeit von f_n , $n \in \mathbb{N}$, zusammen mit $|f_n - 1| \leq c_n < \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0$, daß für ein $R > 0$ mit $\overline{B_R}(z_0) \subset \Omega$ und ein $c > 0$ gilt

$|f_n(z)| \geq c > 0$ für alle $z \in \overline{B_R(z_0)}$. Mit Lemma 5.3.3 folgt dann auch $F(z) \neq 0, z \in \overline{B_R(z_0)}$.

Lokal gleichmäßige Konvergenz

$F_N \rightarrow F, F'_N \rightarrow F'$ ($N \rightarrow \infty$) ergibt mit Stetigkeit von F dann auch $|F(z)| \geq c_1 > 0, z \in \overline{B_R(z_0)}$,
und
$$\frac{F'_N(z)}{F_N(z)} = \sum_{n=1}^N \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}$$

lokal gleichmäßig in $B_R(z_0)$.

Beachte, daß mit

$$|f_n(z)| \geq c > 0 \text{ in } \overline{B_R(z_0)}$$

und der Abschätzung für jedes $0 < r < R$

$$|f'_n(z)| = |(f_n^{-1})'(z)| \leq \frac{\max_{\overline{B_r(z_0)}} |f_n^{-1}|}{R-r} \leq \frac{c_n}{R-r}, \quad z \in B_r(z_0),$$

gemäß der Cauchy-Ungleichung, Bem. 3.4.1.i), auch die Reihe

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}, \quad z \in B_R(z_0),$$

lokal gleichmäßig absolut konvergiert. \square

Beisp. 5.3.3. Wir zeigen Eulers
Produktformel

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Beachte, daß für jedes $z \in \mathbb{C}$ für $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}$
gilt $|f_n(z) - 1| \leq c_n = \frac{|z|^2}{n^2}$, $\sum_{n \neq 0} c_n < \infty$.

Den Beweis führen wir in 3 Schritten.

Beh. 1. Die Funktion $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ erfüllt

$$-\pi \frac{d}{dz} \cot(\pi z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

Bew.: Die Funktion

$$g(z) := \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \notin \mathbb{Z},$$

hat wegen $\sin(\pi z) = \pm \sin(\pi(z-n))$ und

$$(z-n)g(z) = \frac{\pi^2(z-n)^3 - (z-n)\left(\pi(z-n) + O((z-n)^3)\right)^2}{\sin^2(\pi(z-n))(z-n)^2} + O(z-n)$$

$$= O(z-n) \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow n, n \in \mathbb{Z})$$

hebbare Singularitäten bei $z \in \mathbb{Z}$.

Zudem gilt $g(z) = g(z+1)$, $z \in \mathbb{C}$,
und $|g(z)| \leq C$ für $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$, da g stetig.

Weiter gilt für $|\operatorname{Im}(z)| \rightarrow \infty$ sowohl

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} \leq \sum_{n > 2|z|}^{\infty} \frac{4}{n^2} + \frac{4|z|}{|\operatorname{Im} z|} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$$

als auch

$$|\sin(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \right| \rightarrow \infty;$$

also $|g(z)| \leq C$, gleichmäßig in $z \in \mathbb{C}$.

Mit Kor. 3.4.4 (Liouville) folgt

$$g \equiv \text{const.} = \lim_{|\operatorname{Im}(z)| \rightarrow \infty} g(z) = 0.$$

□

Beh. 2: Für $z \notin \mathbb{Z}$ gilt

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Beachte dabei, daß

$$\left| \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{z}{n(z-n)} \right| \leq \frac{2|z|}{n^2}, \quad |n| \geq 2|z|,$$

so daß die Summe absolut konvergiert für $z \notin \mathbb{Z}$.
Folglich können wir die Summe umordnen und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{-n} \right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \quad z \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Bew. von Beh. 2: Gemäß Beh. 1 gilt

für

$$h(z) := \pi \cot(\pi z) - \left(\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \right)$$

die Gleichung

$$\frac{d}{dz} h(z) = \pi \frac{d}{dz} \cot(\pi z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = 0;$$

also wegen $h(z) = -h(-z)$, $z \notin \mathbb{Z}$, $h(z) \equiv \text{const.} = 0$. □

Betrachte nun

$$G(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}, \quad P(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

mit

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \hat{=} \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z), \quad z \notin \mathbb{Z},$$

und mit (gemäß Satz 5.3.5)

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cot(\pi z) = \frac{G'(z)}{G(z)}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

Es folgt für $z \notin \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$\left(\frac{P(z)}{G(z)}\right)' = \frac{P'(z)G(z) - G'(z)P(z)}{G(z)^2} = \frac{P(z)}{G(z)} \underbrace{\left(\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{G'(z)}{G(z)}\right)}_{=0} = 0$$

und $P(z) = c G(z)$

mit

$$c = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{P(z)}{G(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = 1.$$

Ohne Beweis geben wir noch die folgende Darstellung ganzer Funktionen analog zur Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren an.

Def. 5.3.3. Für $k \in \mathbb{N}$ heißt

$$\bar{E}_k(z) = (1-z) e^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}}, \quad z \in \mathbb{C},$$

der kanonische Faktor vom Grad k . Setze weiter

$$\bar{E}_0(z) = 1 - z.$$

Satz 5.3.6 (Hadamard) Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $\rho_f < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq \rho_f < k+1$.

Seien z_1, z_2, \dots die Nullstellen $z_n \neq 0$ von f .

Dann gibt es ein Polynom p vom Grad $\leq k$, so daß

$$f(z) = e^{p(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \bar{E}_k\left(\frac{z}{z_n}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$, falls $f(0) = 0$, und $m = 0$ falls $f(0) \neq 0$.

Bew.: Siehe z.B. Shakarchi-Stein, S. 147 ff.

5.4 Die Gamma-Funktion

Für $s > 0$ gilt gemäß der klassischen Definition

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt. \quad (5.4.1)$$

Indem wir allgemein $t^s = \exp(s \cdot \log t)$ setzen, können wir Γ holomorph auf die rechte Halbebene erweitern.

Satz 5.4.1. Durch (5.4.1) wird eine holomorphe Funktion Γ für $\operatorname{Re}(s) > 0$ erklärt.

Bew.: Schreibe $\Gamma(s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Gamma_{\varepsilon}(s)$ mit

$$\Gamma_{\varepsilon}(s) = \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Da $s \mapsto t^s = \exp(s \log t)$ holomorph, ist $\Gamma_{\varepsilon}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ für jedes $\varepsilon > 0$ ebenfalls holomorph.

Mit $|e^{-t} t^{s-1}| = e^{-t} t^{\operatorname{Re}(s)-1}$, $t > 0$

folgt zudem lokal gleichmäßige Konvergenz

$$\Gamma_{\varepsilon}(s) \rightarrow \Gamma(s) \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

für $\operatorname{Re}(s) > 0$. Mit Kor. 3.4.6 erhalten wir auch Konvergenz in C^1_{loc} , und Γ ist holomorph in $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) > 0\}$. \square

Wir können Γ zu einer meromorphen Funktion
 $\Gamma: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ fortsetzen mit Hilfe der folgenden
Beobachtung,

Lemma 5.4.1. Für $\operatorname{Re}(s) > 0$ gilt

$$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s);$$

insbesondere erhalten wir so $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Bew.: Für $\varepsilon > 0$ integriere partiell

$$\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-t} t^s dt = -\left(e^{-t} t^s\right) \Big|_{t=\varepsilon}^{1/\varepsilon} + s \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-t} t^{s-1} dt,$$

Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ ergibt die behauptete
Identität.

Mit

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

erhalten wir daraus auch für $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = \dots = n! \Gamma(1) = n!$$

□

Motiviert durch Lemma 5.4.1 definieren wir

$$\bar{F}_1(s) := \frac{\Gamma(s+1)}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > -1.$$

Dann ist \bar{F}_1 eine in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > -1$ meromorphe Funktion mit einem einfachen Pol bei $s=0$ und

$$\operatorname{res}_{s=0} \bar{F}_1 = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s \neq 0}} s \bar{F}_1(s) = \Gamma(1) = 1.$$

Da zudem für $\operatorname{Re}(s) > 0$ gilt $\bar{F}_1(s) = \Gamma(s)$, können wir Γ durch \bar{F}_1 für $\operatorname{Re}(s) > -1$ meromorph fortsetzen.

Iterieren wir dieses Verfahren, so erhalten wir die meromorphe Funktion

$$\bar{F}_2(s) = \frac{\bar{F}_1(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s}, \quad \operatorname{Re}(s) > -2,$$

mit einfachen Polstellen bei $s=0$ und $s=-1$,
und allgemein für $m \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$\bar{F}_m(s) = \frac{\bar{F}_{m-1}(s+1)}{s} = \dots = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)\dots s}, \quad \operatorname{Re}(s) > -m,$$

mit einfachen Polstellen bei $s=0, -1, \dots, 1-m$,
welche Γ meromorph auf die Halbebene $\operatorname{Re}(s) > -m$

fortsetzt, mit Residuen

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=-k} \bar{\Gamma}_m &= \lim_{\substack{s \rightarrow -k \\ s \neq -k}} (s+k) \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1) \cdots s} \\ &= \frac{\Gamma(m-k)}{(m-k-1)! (-1)(-2) \cdots (-k)} = \frac{\Gamma(m-k)}{(m-k-1)! k!} \\ &= \frac{(m-k-1)! (-1)^k}{(m-k-1)! k!} = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad 1 \leq k < m. \end{aligned}$$

Im allgemeinen kann man $\Gamma(s)$ für $s \notin \mathbb{N}$ nicht explizit bestimmen. Der folgende Satz erlaubt jedoch die Berechnung von $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Satz 5.4.2. Es gilt für jedes $s \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Kor. 5.4.1. Es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Bew.: $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ erfüllt $(\Gamma(\frac{1}{2}))^2 = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \pi$ nach

Satz 5.4.2. □

Für den Beweis von Satz 5.4.2 benötigen wir ein Lemma.

Lemma 5.4.2. Für $0 < a < 1$ gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{a-1}}{1+r} dr = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

Bew.: Substituieren wir $r = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, erhalten

wir

$$\int_0^{\infty} \frac{r^a}{1+r} \frac{dr}{r} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

gemäß Beisp. 4.1.3. \square

Bew. von Satz 5.4.2: Da $\Gamma(s)$ einfache Pole bei $s = 0, -1, -2, \dots$ besitzt und $\Gamma(1-s)$ einfache Pole bei $s \in \mathbb{N}$, besitzt ihr Produkt $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ ebenso wie $\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ einen einfachen Pol bei jedem $s \in \mathbb{Z}$ und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Wegen der Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung genügt es daher, die Aussage für $0 < s < 1$ zu zeigen.

Beachte zunächst, daß für $0 < s < 1$ gilt

$$\Gamma(1-s) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{-s} dz \stackrel{(z=rt)}{=} t \int_0^{\infty} e^{-rt} (rt)^{-s} dt,$$

wobei $t > 0$ beliebig.

Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge mit dem Satz von Fubini erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \Gamma(1-s) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \Gamma(1-s) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \left(t \int_0^{\infty} e^{-rt} (rt)^{-s} dr \right) dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(1+r)t} r^{-s} dr dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{r^{-s}}{1+r} dr \stackrel{(-s=a-1)}{=} \frac{\pi}{\sin(\pi(1-s))} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 5.4.2 benutzen und beachten, daß mit $0 < s < 1$ auch gilt $0 < a = 1-s < 1$.

□

5.5 Die Riemannsche Zeta-Funktion

Für reelles $s > 1$ konvergiert die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} |n^s| &= |\exp(s \log(n))| \\ &= \exp(\operatorname{Re}(s) \log(n)) = n^{\operatorname{Re}(s)} \end{aligned}$$

konvergiert $\zeta(s)$ auch für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$,
und $s \mapsto \zeta(s)$ ist holomorph in $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1\}$.

Der folgende Satz zeigt eine enge Verbindung
zwischen der ζ -Funktion und den Primzahlen.

Satz 5.5.1 (Euler) Für $\operatorname{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - (1/p)^s}.$$

Bew.: Es genügt, die Identität für reelle $s > 1$
zu zeigen. Die Aussage für alle $s \in \mathbb{C}$ mit
 $\operatorname{Re}(s) > 1$ folgt dann aus der Analytizität der
beiden Funktionsausdrücke.

Beachte, daß für jede Primzahl $p > 1$
und für jedes $s > 1$ gilt

$$\frac{1}{1 - (1/p)^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^{sm}.$$

Weiter besitzt jedes $n \in \mathbb{N}$ gemäß dem
Hauptsatz der Arithmetik eine eindeutige
Produktzerlegung

$$n = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k},$$

wo p_k prim, $s_k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq k$.

Für jedes $N = 2^M \in \mathbb{N}$ erhalten wir so
die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \leq \prod_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \dots + \frac{1}{p^{sM}} \right)$$

$$\leq \prod_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} \left(\frac{1}{1 - (1/p)^s} \right) \leq \prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1}{1 - (1/p)^s} \right),$$

und Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ ergibt

$$\zeta(s) \leq \prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1}{1 - (1/p)^s} \right).$$

Umgekehrt gilt für jedes Paar $M, N \in \mathbb{N}$
die Abschätzung

$$\prod_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \dots + \frac{1}{p^{sM}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

Nach Grenzübergang $M \rightarrow \infty$ folgt

$$\prod_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} \left(\frac{1}{1 - (1/p)^s} \right) \leq \zeta(s).$$

Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ schließlich ergibt

$$\prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1}{1 - (1/p)^s} \right) \leq \zeta(s)$$

und damit die Behauptung.

□

"Ähnlich zum Verfahren zur Fortsetzung von Γ kann man auch ζ zu einer meromorphen Funktion auf \mathbb{C} fortsetzen.

Analog zu Satz 5.4.2 gilt dann die fundamentale Beziehung

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad s \in \mathbb{C};$$

vgl. Salamon (4,69).

Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) < 0$ gilt:

i) $\operatorname{Re}(1-s) > 1$; also $\zeta(1-s) = \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{1-s}} \right) \neq 0$

gemäß Lemma 5.3.3;

ii) $\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s) \Gamma(s)} \neq 0$,

da $\Gamma(s) \cdot \sin(\pi s)$ für $\operatorname{Re}(s) < 1$ nur hebbare Singularitäten bei $s \in -\mathbb{N}_0$ besitzt;

iii) $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0$ gdw. $s/2 \in -\mathbb{N}$.

Also gilt $\zeta(s) \neq 0$ für $\operatorname{Re}(s) < 0$

außer an den "trivialen" Nullstellen $s \in -2\mathbb{N}$,

und $\zeta(s) \neq 0$ für $\operatorname{Re}(s) > 1$ nach Lemma 5.3.3.

Folge: Außer den "trivialen" Nullstellen $s \in -2\mathbb{N}_0$ liegen alle Nullstellen von ζ im "kritischen Streifen" $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$.

Riemannsche Vermutung. Alle Nullstellen s von ζ mit $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$ haben $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.

Bem. 5.5.1, Hadamard hat gezeigt, daß $\zeta(s) \neq 0$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) = 1$, und damit bewiesen, daß gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1,$$

wobei

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{N}; p \text{ prim}, p \leq x\}.$$