5. Der allgemeine Cauchysche Integralsatz

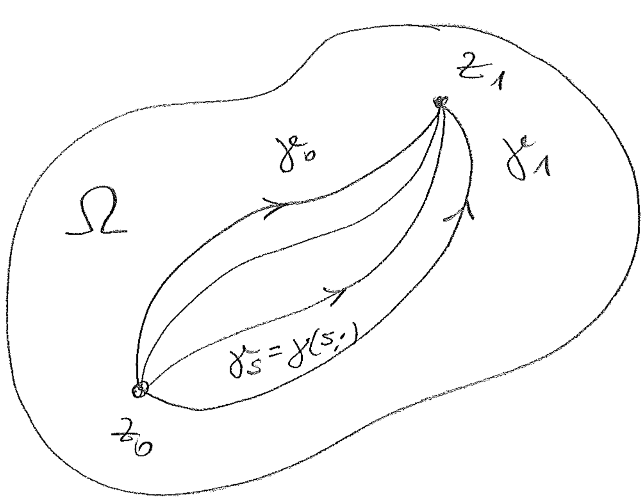
5.1 Homotopien, einfach zshg. Gebiete

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1]; \Omega)$

mit
$$\gamma_0(0) = z_0 = \gamma_1(0), \quad \gamma_0(1) = z_1 = \gamma_1(1).$$

Def. 5.1.1. i) γ_0 und γ_1 heißen zu einander <u>homotop</u> (bei festen Endpunkten), falls $\gamma \in C^0([0,1]\times[0,1]; \Omega)$ existiert mit

$$\gamma(0,t) = \gamma_0(t), \quad \gamma(1,t) = \gamma_1(t), \quad 0 \le t \le 1,$$
$$\gamma(s,0) = z_0, \quad \gamma(s,1) = z_1, \quad 0 \le s \le 1.$$



ii) Falls $\gamma_0, \gamma_1 \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$, so heißt γ eine C^k-<u>Homotopie</u>, falls $\gamma \in C^k$; insbesondere gilt dann: $\forall s \in [0,1]: \gamma_s = \gamma(s,\cdot) \in C^k$,

$s \mapsto \gamma_s \in C^k$ stetig.

Bem. 5.1.1. Für homotope $\gamma_0, \gamma_1 \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$, gibt es stets eine C^k-Homotopie.

Bew.: Nach einer monotonen Umparametrisierung dürfen wir annehmen, daß für ein $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$ gilt

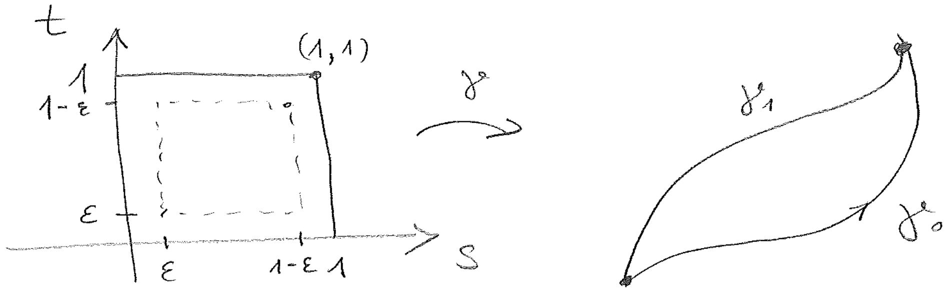
$$\gamma_i(t) = \gamma_i(0) = z_0 \quad \text{für } 0 \le t < \varepsilon_0, \quad 0 \le i \le 1,$$

$$\gamma_i(t) = \gamma_i(1) = z_1 \quad \text{für } 1-\varepsilon_0 < t \le 1, \quad 0 \le i \le 1,$$

sowie

$$\gamma(s,\cdot) = \gamma_0 \quad \text{für } 0 \le s < \varepsilon_0, \quad \text{und}$$

$$\gamma(s,\cdot) = \gamma_1 \quad \text{für } 1-\varepsilon_0 < s \le 1.$$



Glätte nun γ; z.B. durch Faltung

$$\gamma_\varepsilon(s,t) = (\gamma * \rho_\varepsilon)(s,t) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma(s-s', t-t')\,\rho_\varepsilon(s',t')\,ds'dt'$$

mit einem glättenden Kern

$$\rho_\varepsilon(s,t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho\left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right),$$

wobei $\rho \in C_c^\infty(]-1,1[^2)$ mit $0 \le \rho \le 1$

und $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \rho(s,t)\,ds\,dt = 1.$

Der Cauchy'sche Integralsatz (Satz 3.3.2) liefert das folgende Resultat.

<u>Satz</u> 5.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, und seien $\gamma_0, \gamma_1 \in C^1([0,1]; \Omega)$ homotop bei festen Endpunkten. Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

<u>Bew.:</u> Sei $\gamma \in C^0([0,1]^2; \Omega)$ eine C^1-Homotopie von γ_0 zu γ_1. Da

$$K = \gamma([0,1]^2) \subset \Omega$$

kompakt, gibt es $r > 0$ mit

$$\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > r,$$

und endlich viele Bälle $B_r(z_l)$, $1 \leq l \leq L$, mit $z_l \in K$, so daß $\overline{B_r(z_l)} \subset \Omega$, $1 \leq l \leq L$, überdecken K.

Für $0 \leq s \leq 1$ setze $\gamma_s(t) := \gamma(s,t)$ mit $\gamma_s \in C^1([0,1]; \Omega)$, und definiere

$$F(s) := \int_{\gamma_s} f(z)\,dz \in \mathbb{C}.$$

Beh.: $F(s) = F(0) = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz$ für $0 \le s \le 1$.

Bew.: Setze

$$I = \{ s \in [0,1] ;\ F(s) = F(0) \} .$$

Dann gilt $0 \in I$; also $I \neq \emptyset$.

Da $s \mapsto \gamma_s \in C^1$ nach Voraussetzung stetig ist, ist auch die Abbildung

$$s \mapsto F(s) = \int_0^1 f(\gamma_s(t))\,\dot{\gamma}_s(t)\,dt$$

stetig; I ist also auch abgeschlossen.

Sei schließlich $s_0 \in I$. Wir zeigen:

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, 0 \le s \le 1 : |s - s_0| < \delta \Rightarrow F(s) = F(s_0) = F(0).$$

Sei dazu

$$im(\gamma_{s_0}) = \gamma_{s_0}([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} B_r(z_i) ,$$

wobei für $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{i_0} = 1$ gelte

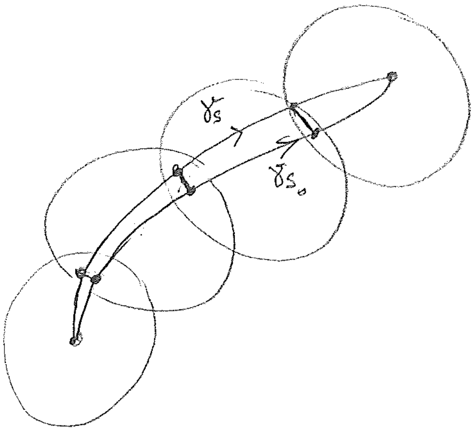
(5.1.1) $\gamma_{s_0}([t_{i-1}, t_i]) \subset B_r(z_i)$, $1 \le i \le i_0$

und damit insbesondere

(5.1.2) $\gamma_{s_0}(t_i) \subset B_r(z_i) \cap B_r(z_{i+1})$, $1 \le i \le i_0$.

(Die Punkte z_i, $1 \le i \le i_0$, sind nicht unbedingt paarweise verschieden.)

Da $B_r(z_i)$ offen für jedes i, gibt es $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, daß für alle $s \in [0,1]$ mit $|s - s_0| < \delta$ die Beziehungen (5.1.1), (5.1.2) auch gelten für γ_s.



Da $B_r(z_i) \cap B_r(z_{i+1})$ konvex können wir für jedes $1 \le i \le i_0$ die Bögen

$$\gamma_{s_0}|[t_{i-1}, t_i] \,,\quad \gamma_s|[t_{i-1}, t_i]$$

durch Hinzunahme der geraden Verbindungsstrecken $\gamma^{(i-1)}$, bzw. $\gamma^{(i)}$, wobei

$$\gamma^{(j)}(t) = t\,\gamma_s(t_j) + (1-t)\,\gamma_{s_0}(t_j)\,, \quad 0 \le t \le 1\,,$$

zu geschlossenen Kurven

$$\Gamma_i = \gamma_{s_0}|[t_{i-1}, t_i] + \gamma^{(i)} - \gamma_s|[t_{i-1}, t_i] - \gamma^{(i-1)}$$

in $B_r(z_i)$ ergänzen. Mit Satz 3.3.2 folgt

$$F(s_0) - F(s) = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz - \int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{i_0} \int_{\Gamma_i} f(z)\,dz = 0.$$

Also ist I auch offen, und damit $I = [0,1]$. $\square$

Def. 5.1.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt Ω einfach zusammenhängend (1-zshg.), falls je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1]; \Omega)$ mit denselben Endpunkten zueinander homotop sind.

Bem. 5.1.2. i) Insbesondere ist in einem 1-zshg. Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ dann jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([0,1]; \Omega)$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$ homotop zum konstanten Weg $\gamma_0(t) = z_0$, $0 \le t \le 1$; d.h. jede geschlossene Kurve ist "zusammenziehbar."

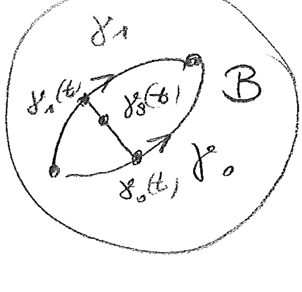
ii) Umgekehrt gilt: Ist jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([0,1]; \Omega)$ zusammenziehbar, so ist Ω 1-zshg.

Beisp. 5.1.1. i) Jeder Ball $B = B_R(z_0)$ ist 1-zshg.

Bew.: Für je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1]; B)$ mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ ist $\gamma \in C^0([0,1]^2; B)$ mit

$$\gamma(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\,\gamma_1(t)$$

eine Homotopie von γ_0 nach γ_1



ii) Allgemeiner zeigt der Beweis von i), daß jedes konvexe Gebiet Ω 1-zslg. ist.

iii) Das Gebiet $\Omega = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0])$ ist 1-zslg, da

$$\Phi :]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\ni (r, \theta) \mapsto r e^{i\theta} \in \Omega$$

einen Homöomorphismus von Ω auf ein 1-zslg Gebiet definiert.

iv) Die Menge $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht 1-zslg.

Bew.: Andernfalls müßte nach Bem. 5.1.2.i) und Satz 5.1.1 für jede holomorphe Funktion f und jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1], \Omega)$ gelten

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 ;$$

jedoch erhalten wir für $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$, und $\gamma = \partial B_r(0)$, $r > 0$, gemäß Satz 3.4.1

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial B_r(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

Satz 3.1.1 und Satz 5.1.1 ergeben sofort das folgende Resultat.

<u>Satz 5.1.2.</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $F: \Omega \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

<u>Bew.:</u> Nach Satz 5.1.1 ist für jede Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ nur abhängig von den Endpunkten von γ, und Satz 3.1.1 liefert das gewünschte F. □

Insbesonder erhalten wir

<u>Kor. 5.1.1</u> (Cauchy) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und 1-zshg, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ geschlossen. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 .$$

5.2 Der komplexe Logarithmus

Auf jedem 1-zshg., offenen $\Omega \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $1 \in \Omega$ können wir einen "Zweig" des komplexen Logarithmus einführen.

<u>Satz</u> 5.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg und mit $1 \in \Omega$, $0 \notin \Omega$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion $F(z) = \log_\Omega(z)$, $z \in \Omega$, mit

i) $e^{F(z)} = z$, $z \in \Omega$,

ii) $F(1) = 0$.

<u>Bew.:</u> Für $z \in \Omega$ setze

$$F(z) := \int_\gamma \frac{dz}{z},$$

wobei $\gamma \in C^1([0,1];\Omega)$ ein beliebiger Weg ist mit $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = z$.

Da Ω nach Annahme 1-zshg mit $0 \notin \Omega$, ist F wohldefiniert, und wie im Beweis von Satz 3.1.1. ist F holomorph mit

$$F'(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \Omega.$$

Nach Konstruktion gilt $F(1) = 0$.
Weiter gilt

$$\frac{d}{dz}\left(z e^{-F(z)}\right) = e^{-F(z)}\left(1 - z F'(z)\right) = 0;$$

also

$$z e^{-F(z)} = 1 e^{-F(1)} = 1, \quad z \in \Omega.$$

$\square$

<u>Bem.</u> 5.2.1. i) Für $\Omega = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0])$ erhalten wir mittels Satz 5.2.1 den bereits früher eingeführten <u>Hauptzweig</u> des Logarithmus zurück.

ii) Für ein offenes 1-zslg. $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $1 \in \Omega$ und ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$ können wir nun die <u>allgemeine Potenz</u>

$$z^\alpha := \exp\left(\alpha \log_\Omega(z)\right), \quad z \in \Omega,$$

einführen. Diese ist jedoch stets abhängig vom gewählten Gebiet Ω.

iii) <u>Vorsicht</u> ist jedoch <u>geboten</u> bei der Anwendung der üblichen Rechenregeln!

z.B. gilt für den Hauptzweig des Logarithmus bei Wahl von $z_1 = z_2 = e^{2\pi i/3}$, $z_1 z_2 = e^{4\pi i/3} = e^{-2\pi i/3}$ nach Definition

$$\log(z_1 z_2) = -2\pi i/3 \neq \log(z_1) + \log(z_2) = 4\pi i/3$$

Somit gilt auch

$$(z_1 z_2)^i = \exp\left(i \log(z_1 z_2)\right) = e^{2\pi/3},$$

während $$z_1^i = \exp(i \log z_1) = e^{-2\pi/3}$$

also $$z_1^i \cdot z_2^i = e^{-4\pi/3} \neq (z_1 z_2)^i .$$

<u>Satz</u> 5.2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg, $f: \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Dann gibt es $g: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$e^{g(z)} = f(z), \quad z \in \Omega.$$

<u>Bem.</u> 5.2.2. g ist eindeutig bis auf Vielfache von $2\pi i$ bestimmt und definiert einen Zweig der Funktion $\log(f(z))$, $z \in \Omega$.

<u>Bew.</u> <u>von</u> <u>Satz</u> 5.2.2: Fixiere $z_0 \in \Omega$. Für $z \in \Omega$ setze

$$g(z) := \int_\gamma \underbrace{\frac{f'(z)}{f(z)}}_{\text{"}= (\log f)'(z)\text{"}} dz + c_0$$

wobei $\gamma \in C^1_{pw}([0,1], \Omega)$ eine beliebige Kurve ist von $\gamma(0) = z_0$ nach $\gamma(1) = z$, und mit zu bestimmendem $c_0 \in \mathbb{C}$.

Wie im Beweis von Satz 3.1.1 ist

$g : \Omega \to \mathbb{C}$ wohldefiniert und holomorph

mit
$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in \Omega,$$

so daß
$$\frac{d}{dz}\left(f(z)e^{-g(z)}\right) = e^{-g(z)}\underbrace{\left(f'(z) - f(z)g'(z)\right)}_{=0} = 0.$$

Es folgt
$$f(z)e^{-g(z)} = f(z_0)e^{-c_0}, \quad z \in \Omega.$$

Wähle $c_0 \in \mathbb{C}$ mit $e^{c_0} \overset{!}{=} f(z_0)$! □

5.3 Ganze Funktionen

Gibt es eine Beziehung zwischen den Nullstellen einer holomorphen Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und ihrem Verhalten für $|z| \to \infty$?

Wir beweisen zunächst den folgenden Satz.

Satz 5.3.1 (Jensen) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $B = B_R(0) \subset \overline{B} \subset \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für $z \in \partial B$, $f(0) \neq 0$. Dann gilt

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{K} \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta,$$

wobei $z_1, \dots, z_K$ die Nullstellen von f in B bezeichnet und jede Nullstelle entsprechend ihrer Multiplizität n_k-mal in der Aufzählung erscheint.

Eine wichtige Rolle beim Beweis spielt der Cauchy'sche Darstellungssatz in der folgenden Form.

<u>Satz</u> 5.3.2 (Mittelwerteigenschaft)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $B = B_R(0) \subset \overline{B} \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$(5.3.1) \quad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\, d\theta .$$

Falls weiter $f = u + iv$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$, so gilt

$$(5.3.2) \quad u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\, d\theta .$$

<u>Bew.</u>: Nach Satz 3.4.1 gilt mit $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\, dt ,$$

also (5.3.1). Die Formel (5.3.2) folgt nach Übergang zum Realteil in (5.3.1).

$\square$

Weiter benötigen wir das folgende Lemma.

<u>Lemma</u> 5.3.1. Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$.

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - a e^{i\theta}| \, d\theta = 0.$$

<u>Bew.</u>: Die Funktion $f(z) = 1 - az$, $z \in \mathbb{C}$, ist holomorph mit $f(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$.

Also gibt es $R > 1$ mit $f(z) \neq 0$, $z \in B_R(0)$.

Nach Satz 5.2.2 gibt es $g : B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = e^{g(z)}$, $z \in B_R(0)$,

und

$$\log |f(z)| = \log \left(e^{\operatorname{Re}(g(z))} \right) = \operatorname{Re}(g(z)).$$

Mit (5.3.2) folgt

$$\int_0^{2\pi} \log |e^{i\theta} - a| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(g(e^{i\theta})\right) d\theta = 2\pi \operatorname{Re}(g(0))$$

$$= 2\pi \log \underbrace{|f(0)|}_{=1} = 0.$$

$\square$

Bew. von Satz 5.3.1: Wir beweisen den Satz in 4 Schritten.

i) Nimm an, der Satz gilt für f_1 und f_2. Da $f = f_1 f_2$ genau dort verschwindet, wo entweder f_1 oder f_2 verschwindet, und da

$$\log|f_1 f_2| = \log|f_1| + \log|f_2|$$

für den reellen Logarithmus, folgt die Aussage für $f = f_1 f_2$.

ii) Falls $z_1, \ldots, z_k \in B$ die Nullstellen von f mit Multiplizität bezeichnet, so hat die holomorphe Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}, \quad z \in U \setminus \{z_1, \ldots, z_k\},$$

wo $U \subset \Omega$ eine offene Umgebung von $\bar{B}$, hebbare Singularitäten bei $z_1, \ldots, z_k$; also

$$f(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_k)\, g(z)$$

mit holomorphem $g : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

iii) OBdA dürfen wir annehmen, daß U 1-zshg. Nach Satz 5.2.2 gibt es $h: U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g = e^h$; insbesondere gilt

$$|g(z)| = e^{\operatorname{Re}(h(z))}, \quad z \in U,$$

und mit (5.3.2) folgt

$$\log|g(0)| = \operatorname{Re}(h(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(h(Re^{i\theta})\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|g(Re^{i\theta})|\, d\theta .$$

iv) Fixiere $1 \leq k \leq K$. Für $f_k(z) = z - z_k$, $z \in \mathbb{C}$, gilt nach Lemma 5.3.1

$$\int_0^{2\pi} \log|f_k(Re^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - z_k|\, d\theta$$

$$= 2\pi \log R + \int_0^{2\pi} \log\Big|e^{i\theta} - \underbrace{\frac{z_k}{R}}_{=: a \in B_1(0)}\Big|\, d\theta$$

$$\overset{(t=-\theta)}{=} 2\pi \log R - \underbrace{\int_0^{2\pi} \log|1 - ae^{it}|\, dt}_{=0} = 2\pi \log R .$$

Es folgt

$$\log|f_k(0)| = \log|z_k| =$$

$$= \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \log R$$

$$= \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_k(Re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Mit i) – iii) liefert dies die Aussage des Satzes. $\square$

Für holomorphes $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $r > 0$ sei

$$n(r) = n_f(r) = \#\{z \in B_r(0);\ f(z) = 0\},$$

wobei jede Nullstelle mit ihrer Multiplizität gezählt wird.

<u>Lemma 5.3.2.</u> Für $R > 0$ gilt

$$\int_0^R n(r)\,\frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{K} \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right),$$

falls $f(0) \neq 0$, wobei $z_1, \dots, z_K \in B_R(0)$ die Nullstellen von f mit Multiplizität bezeichnet.

<u>Bew.:</u> Für $1 \leq k \leq K$ gilt

$$\int_{|z_k|}^{R} \frac{dr}{r} = \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right).$$

Mit $\chi_k(r) = \begin{cases} 1, & r > |z_k| \\ 0, & r \leq |z_k| \end{cases}$, $1 \leq k \leq K$,

folgt $n(r) = \sum_{k=1}^{K} \chi_k(r)$, $0 < r < R$, also

$$\int_0^R n(r)\,\frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{K} \int_0^R \chi_k(r)\,\frac{dr}{r}$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \int_{|z_k|}^{R} \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{K} \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right).$$

$\square$