5. Der allgemeine Cauchysche Integralsatz

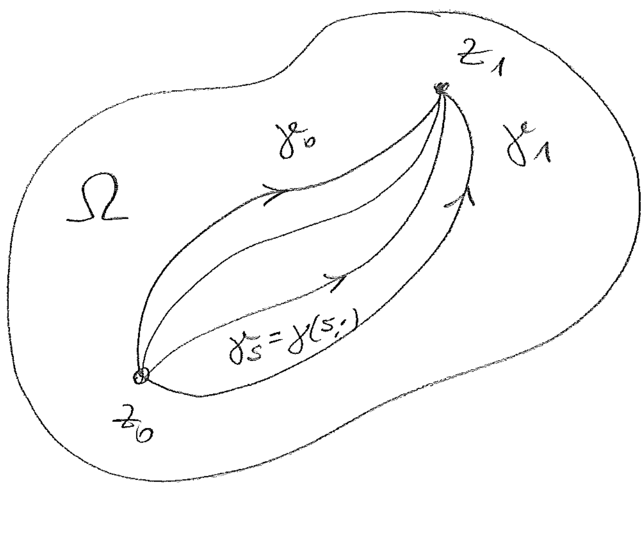
5.1 Homotopien, einfach zshg. Gebiete

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1]; \Omega)$

mit
$$\gamma_0(0) = z_0 = \gamma_1(0), \quad \gamma_0(1) = z_1 = \gamma_1(1).$$

Def. 5.1.1. i) γ_0 und γ_1 heißen zu einander homotop (bei festen Endpunkten), falls $\gamma \in C^0([0,1] \times [0,1]; \Omega)$ existiert mit

$$\gamma(0,t) = \gamma_0(t), \quad \gamma(1,t) = \gamma_1(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$\gamma(s,0) = z_0, \quad \gamma(s,1) = z_1, \quad 0 \leq s \leq 1.$$



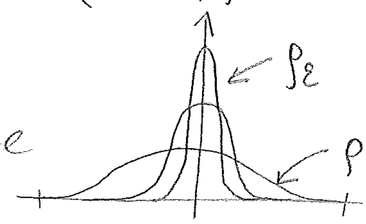
ii) Falls $\gamma_0, \gamma_1 \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$, so heißt γ eine C^k-Homotopie, falls $\gamma \in C^k$; insbesondere gilt dann: $\forall s \in [0,1]: \gamma_s = \gamma(s,\cdot) \in C^k$, $s \mapsto \gamma_s \in C^k$ stetig.

Bem. 5.1.1. Für homotope $\gamma_0, \gamma_1 \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$, gibt es stets eine C^k-Homotopie.

Zum Beweis benutzen wir das Hilfsmittel der Faltung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit einem glättenden Kern.

Sei dazu $0 \leq \rho = \rho(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\rho) \subset B_1(0)$
und
$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1.$$

Für $0 < \varepsilon < 1$ setze $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in C_c^\infty(B_\varepsilon(0)) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
mit
$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\, dx \overset{(y=\frac{x}{\varepsilon})}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, dy = 1 \qquad (5.1.1)$$



und zu gegebenem $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ setze
$$(f * \rho_\varepsilon)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, \rho_\varepsilon(y)\, dy \qquad (5.1.2)$$
$$\overset{(z:=x-y)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, \rho_\varepsilon(x-z)\, dz \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

mit $d(f * \rho_\varepsilon) = (df * \rho_\varepsilon)$ wegen (5.1.2) und mit
$$\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{C^0} \overset{(5.1.1)}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\, \rho_\varepsilon(y)\, dy \right|$$
$$(5.1.3) \qquad \leq \underbrace{\sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n \\ |y| < \varepsilon}} |f(x-y) - f(x)|}_{\to 0 \ (\varepsilon \downarrow 0)} \ \overbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\rho_\varepsilon(y)}_{\geq 0}\, dy}^{=1},$$

da $\operatorname{supp}(f)$ nach Annahme kompakt, f also gleichmäßig stetig; analog für die Ableitung df.

Bew. von Bem. [1] 5.1.1. Nach Umparametrisierung $\tilde{\gamma}_0(t) = (\gamma_0 \circ \varphi)(t)$, etc, mit $\varphi \in C^1([0,1]; [0,1])$, wo $\varphi' \geq 0$, $\varphi(t) = 0$ für $t \leq \varepsilon_0$, $\varphi(t) = 1$ für $t \geq 1-\varepsilon_0$ für eine Zahl $0 < \varepsilon_0 < 1/2$, dürfen wir annehmen, daß gilt

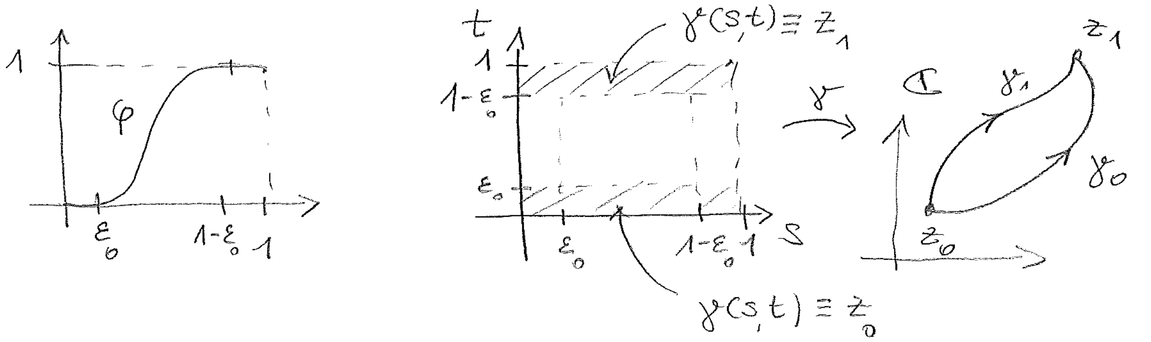
$$\gamma_{0,1}(t) = \gamma_{0,1}(0) = z_0 \quad \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon_0,$$

$$\gamma_{0,1}(t) = \gamma_{0,1}(1) = z_1 \quad \text{für } 1-\varepsilon_0 \leq t \leq 1,$$

sowie

$$\gamma(s,\cdot) = \gamma_0 \quad \text{für } 0 \leq s \leq \varepsilon_0,$$

$$\gamma(s,\cdot) = \gamma_1 \quad \text{für } 1-\varepsilon_0 \leq s \leq 1.$$



Sei $0 \leq \rho = \rho(s,t) \in C_c^\infty(B_1(0))$ ein glättender Kern.
Für $0 < 2\varepsilon \leq \varepsilon_0$ glätte zunächst $\gamma_0 \equiv \gamma_s = \gamma(s,\cdot)$, $0 \leq s \leq \varepsilon_0$, durch

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s,t) = (\gamma_0 * \rho_\varepsilon)(s,t), \quad 0 \leq s \leq \varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon.$$

Da $\gamma_0 \in C^1$, folgt mit (5.1.2) auch $\gamma_s^{(\varepsilon)} = \gamma^{(\varepsilon)}(s,\cdot) \in C^1$ für $0 \leq s \leq \varepsilon$, und (5.1.3) ergibt $\gamma_s^{(\varepsilon)} \to \gamma_0$ in C^1 für $s \downarrow 0$.

(Betrachte $f = \gamma_0$, bzw. $f = \dot{\gamma}_0$.)

Analog glätten wir $\gamma_1 \equiv \gamma_s$, $1-\varepsilon_0 \leq s \leq 1$, indem wir setzen

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s,t) = (\gamma_1 * \rho_{1-s})(s,t), \quad \varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon \leq s \leq 1.$$

Weiter setzen wir

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s,t) = z_0, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon,$$

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s,t) = z_1, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 1-\varepsilon \leq t \leq 1,$$

und schließlich

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s,t) = (\gamma * \rho_\varepsilon)(s,t), \quad \varepsilon \leq s,t \leq 1-\varepsilon,$$

um die gewünschte C^1-Homotopie zu erhalten.

Der Cauchy'sche Integralsatz (Satz 3.3.2) liefert das folgende Resultat.

<u>Satz</u> 5.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, und seien $\gamma_0, \gamma_1 \in C^1([0,1]; \Omega)$ homotop bei festen Endpunkten. Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

<u>Bew.</u>: Sei $\gamma \in C^0([0,1]^2; \Omega)$ eine C^1-Homotopie von γ_0 zu γ_1. Da

$$K = \gamma([0,1]^2) \subset \Omega$$

kompakt, gibt es $r > 0$ mit

$$\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > r,$$

und endlich viele Bälle $B_r(z_l)$, $1 \le l \le L$, mit $z_l \in K$, so daß $\overline{B_r(z_l)} \subset \Omega$, $1 \le l \le L$, überdecken K.

Für $0 \le s \le 1$ setze $\gamma_s(t) := \gamma(s,t)$ mit $\gamma_s \in C^1([0,1]; \Omega)$, und definiere

$$F(s) := \int_{\gamma_s} f(z)\,dz \in \mathbb{C}.$$

Beh.: $F(s) = F(0) = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz$ für $0 \leq s \leq 1$.

Bew.: Setze

$$I = \{ s \in [0,1] ;\ F(s) = F(0) \} .$$

Dann gilt $0 \in I$; also $I \neq \emptyset$.

Da $s \mapsto \gamma_s \in C^1$ nach Voraussetzung stetig ist, ist auch die Abbildung

$$s \mapsto F(s) = \int_0^1 f(\gamma_s(t))\,\dot\gamma_s(t)\,dt$$

stetig; I ist also auch abgeschlossen.

Sei schließlich $s_0 \in I$. Wir zeigen:

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, 0 \leq s \leq 1 : |s - s_0| < \delta \Rightarrow F(s) = F(s_0) = F(0).$$

Sei dazu

$$im(\gamma_{s_0}) = \gamma_{s_0}([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} B_r(z_i) ,$$

wobei für $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{i_0} = 1$ gelte

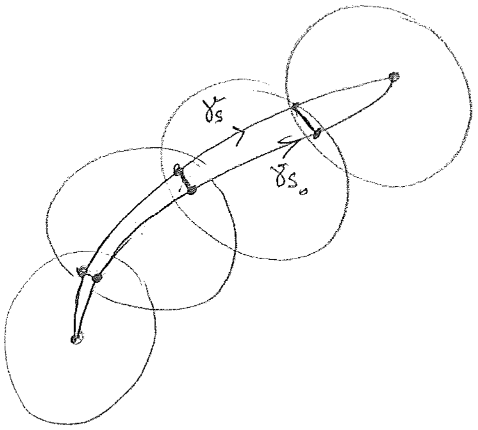
$$(5.1.1) \quad \gamma_{s_0}([t_{i-1}, t_i]) \subset B_r(z_i) , \quad 1 \leq i \leq i_0$$

und damit insbesondere

$$(5.1.2) \qquad \gamma_{s_0}(t_i) \subset B_r(z_i) \cap B_r(z_{i+1}) , \quad 1 \leq i \leq i_0 .$$

(Die Punkte z_i, $1 \leq i \leq i_0$, sind nicht unbedingt paarweise verschieden.)

Da $B_r(z_i)$ offen für jedes i, gibt es $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, daß für alle $s \in [0,1]$ mit $|s - s_0| < \delta$ die Beziehungen (5.1.1), (5.1.2) auch gelten für γ_s.



Da $B_r(z_i) \cap B_r(z_{i+1})$ konvex können wir für jedes $1 \le i \le i_0$ die Bögen

$\gamma_{s_0}|[t_{i-1}, t_i]$, $\gamma_s|[t_{i-1}, t_i]$

durch Hinzunahme der geraden Verbindungsstrecken $\gamma^{(i-1)}$, bzw. $\gamma^{(i)}$, wobei

$$\gamma^{(j)}(t) = t\,\gamma_s(t_j) + (1-t)\,\gamma_{s_0}(t_j), \quad 0 \le t \le 1,$$

zu geschlossenen Kurven

$$\Gamma_i = \gamma_{s_0}|[t_{i-1}, t_i] + \gamma^{(i)} - \gamma_s|[t_{i-1}, t_i] - \gamma^{(i-1)}$$

in $B_r(z_i)$ ergänzen. Mit Satz 3.3.2 folgt

$$F(s_0) - F(s) = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz - \int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{i_0} \int_{\Gamma_i} f(z)\,dz = 0.$$

Also ist I auch offen, und damit $I = [0,1]$. $\square$

Def. 5.1.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt Ω <u>einfach zusammenhängend</u> (1-zshg.), falls je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1]; \Omega)$ mit denselben Endpunkten zueinander homotop sind.

Bem. 5.1.2. i) Insbesondere ist in einem 1-zshg. Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ dann jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([0,1]; \Omega)$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$ homotop zum konstanten Weg $\gamma_0(t) = z_0$, $0 \leq t \leq 1$; d.h. jede geschlossene Kurve ist "zusammenziehbar."

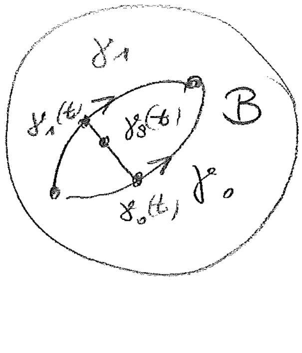
ii) Umgekehrt gilt: Ist jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([0,1]; \Omega)$ zusammenziehbar, so ist Ω 1-zshg.

Beisp. 5.1.1. i) Jeder Ball $B = B_R(z_0)$ ist 1-zshg.

<u>Bew.:</u> Für je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1]; B)$ mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ ist $\gamma \in C^0([0,1]^2; B)$ mit

$$\gamma(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$$

eine Homotopie von γ_0 nach γ_1



ii) Allgemeiner zeigt der Beweis von i), daß jedes konvexe Gebiet Ω 1-zslg. ist.

iii) Das Gebiet $\Omega = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0])$ ist 1-zslg, da

$$\Phi :]0,\infty[\times]-\pi, \pi[\ni (r, \theta) \mapsto r e^{i\theta} \in \Omega$$

einen Homöomorphismus von Ω auf ein 1-zslg Gebiet definiert.

iv) Die Menge $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht 1-zslg.

Bew.: Andernfalls müßte nach Bem. 5.1.2.i) und Satz 5.1.1 für jede holomorphe Funktion f und jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1], \Omega)$ gelten

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 ;$$

jedoch erhalten wir für $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$, und $\gamma = \partial B_r(0)$, $r > 0$, gemäß Satz 3.4.1

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial B_r(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

Satz 3.1.1 und Satz 5.1.1 ergeben sofort das folgende Resultat.

Satz 5.1.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $F : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

Bew.: Nach Satz 5.1.1 ist für jede Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ nur abhängig von den Endpunkten von γ, und Satz 3.1.1 liefert das gewünschte F. □

Insbesondere erhalten wir

Kor. 5.1.1 (Cauchy) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und 1-zshg, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ geschlossen. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

5.2 Der komplexe Logarithmus

Auf jedem 1-zshg., offenen $\Omega \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $1 \in \Omega$ können wir einen "Zweig" des komplexen Logarithmus einführen.

Satz 5.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg und mit $1 \in \Omega$, $0 \notin \Omega$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion $F(z) = \log_\Omega(z)$, $z \in \Omega$, mit

i) $e^{F(z)} = z$, $z \in \Omega$,

ii) $F(1) = 0$.

Bew.: Für $z \in \Omega$ setze

$$F(z) := \int_\gamma \frac{dz}{z},$$

wobei $\gamma \in C^1([0,1]; \Omega)$ ein beliebiger Weg ist mit $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = z$.

Da Ω nach Annahme 1-zshg mit $0 \notin \Omega$, ist F wohldefiniert, und wie im Beweis von Satz 3.1.1. ist F holomorph mit

$$F'(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \Omega.$$

Nach Konstruktion gilt $F(1) = 0$.

Weiter gilt

$$\frac{d}{dz}\left(z e^{-F(z)}\right) = e^{-F(z)}\left(1 - zF'(z)\right) = 0;$$

also

$$z e^{-F(z)} = 1 e^{-F(1)} = 1, \quad z \in \Omega.$$

$\square$

<u>Bem.</u> 5.2.1. i) Für $\Omega = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0])$ erhalten wir mittels Satz 5.2.1 den bereits früher eingeführten <u>Hauptzweig</u> des Logarithmus zurück.

ii) Für ein offenes 1-zshg. $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $1 \in \Omega$ und ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$ können wir nun die <u>allgemeine</u> <u>Potenz</u>

$$z^\alpha := \exp\left(\alpha \log_\Omega(z)\right), \quad z \in \Omega,$$

einführen. Diese ist jedoch stets abhängig vom gewählten Gebiet Ω.

iii) <u>Vorsicht</u> ist jedoch <u>geboten</u> bei der Anwendung der üblichen Rechenregeln!
z.B. gilt für den Hauptzweig des Logarithmus bei Wahl von $z_1 = z_2 = e^{2\pi i/3}$, $z_1 z_2 = e^{4\pi i/3} = e^{-2\pi i/3}$ nach Definition

$$\log(z_1 z_2) = -2\pi i/3 \neq \log(z_1) + \log(z_2) = 4\pi i/3$$

Somit gilt auch

$$(z_1 z_2)^i = \exp\left(i \log(z_1 z_2)\right) = e^{2\pi/3},$$

während $$z_1^i = \exp(i \log z_1) = e^{-2\pi/3}$$

also $$z_1^i \cdot z_2^i = e^{-4\pi/3} \neq (z_1 z_2)^i.$$

Satz 5.2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg, $f : \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Dann gibt es $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$e^{g(z)} = f(z), \quad z \in \Omega.$$

Bem. 5.2.2. g ist eindeutig bis auf Vielfache von $2\pi i$ bestimmt und definiert einen Zweig der Funktion $\log(f(z))$, $z \in \Omega$.

Bew. von Satz 5.2.2: Fixiere $z_0 \in \Omega$. Für $z \in \Omega$ setze

$$g(z) := \int_\gamma \underbrace{\frac{f'(z)}{f(z)}}_{\text{"}= (\log f)'(z)\text{"}} dz + c_0$$

wobei $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ eine beliebige Kurve ist von $\gamma(0) = z_0$ nach $\gamma(1) = z$, und mit zu bestimmendem $c_0 \in \mathbb{C}$.

Wie im Beweis von Satz 3.1.1 ist

$g : \Omega \to \mathbb{C}$ wohldefiniert und holomorph

mit
$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in \Omega,$$

so daß
$$\frac{d}{dz}\left(f(z)e^{-g(z)}\right) = e^{-g(z)}\underbrace{\left(f'(z) - f(z)g'(z)\right)}_{=0} = 0.$$

Es folgt
$$f(z)e^{-g(z)} = f(z_0)e^{-c_0}, \quad z \in \Omega.$$

Wähle $c_0 \in \mathbb{C}$ mit $e^{c_0} \overset{!}{=} f(z_0)$!

$\square$

5.3 Ganze Funktionen

Gibt es eine Beziehung zwischen den Nullstellen einer holomorphen Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und ihrem Verhalten für $|z| \to \infty$?

Wir beweisen zunächst den folgenden Satz.

<u>Satz</u> 5.3.1 (Jensen) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $B = B_R(0) \subset \overline{B} \subset \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für $z \in \partial B$, $f(0) \neq 0$. Dann gilt

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{K} \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta,$$

wobei $z_1, \dots, z_K$ die Nullstellen von f in B bezeichnet und jede Nullstelle entsprechend ihrer Multiplizität n_k-mal in der Aufzählung erscheint.

Eine wichtige Rolle beim Beweis spielt der Cauchy'sche Darstellungssatz in der folgenden Form.

<u>Satz</u> 5.3.2 (Mittelwerteigenschaft)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $B = B_R(0) \subset \overline{B} \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$(5.3.1) \quad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\, d\theta.$$

Falls weiter $f = u + iv$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$, so gilt

$$(5.3.2) \quad u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\, d\theta.$$

<u>Bew.:</u> Nach Satz 3.4.1 gilt mit $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\, dt,$$

also (5.3.1). Die Formel (5.3.2) folgt nach Übergang zum Realteil in (5.3.1).

$\square$

Weiter benötigen wir das folgende Lemma.

<u>Lemma</u> 5.3.1. Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$.

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - a e^{i\theta}| \, d\theta = 0.$$

<u>Bew.</u>: Die Funktion $f(z) = 1 - az$, $z \in \mathbb{C}$, ist holomorph mit $f(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$.
Also gibt es $R > 1$ mit $f(z) \neq 0$, $z \in B_R(0)$.
Nach Satz 5.2.2 gibt es $g : B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = e^{g(z)}$, $z \in B_R(0)$,

und

$$\log |f(z)| = \log\left(e^{\mathrm{Re}(g(z))}\right) = \mathrm{Re}(g(z)).$$

Mit (5.3.2) folgt

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - a e^{i\theta}| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(g(e^{i\theta})\right) d\theta = 2\pi \, \mathrm{Re}\left(g(0)\right)$$

$$= 2\pi \log \underbrace{|f(0)|}_{=1} = 0.$$

$\square$

__Bew. von Satz__ 5.3.1: Wir beweisen den Satz in 4 Schritten.

i) Nimm an, der Satz gilt für f_1 und f_2. Da $f = f_1 f_2$ genau dort verschwindet, wo entweder f_1 oder f_2 verschwindet, und da

$$\log|f_1 f_2| = \log|f_1| + \log|f_2|$$

für den __reellen__ Logarithmus, folgt die Aussage für $f = f_1 f_2$.

ii) Falls $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{B}$ die Nullstellen von f mit Multiplizität bezeichnet, so hat die holomorphe Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}, \quad z \in U \setminus \{z_1, \ldots, z_k\},$$

wo $U \subset \Omega$ eine offene Umgebung von $\mathbb{B}$, hebbare Singularitäten bei $z_1, \ldots, z_k$; also

$$f(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_k)\, g(z)$$

mit holomorphem $g : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

iii) OBdA dürfen wir annehmen, daß U 1-zshg. Nach Satz 5.2.2 gibt es $h: U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g = e^h$; insbesondere gilt

$$|g(z)| = e^{\mathrm{Re}(h(z))}, \quad z \in U,$$

und mit (5.3.2) folgt

$$\log|g(0)| = \mathrm{Re}(h(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(h(Re^{i\theta}))\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(Re^{i\theta})|\,d\theta.$$

iv) Fixiere $1 \leq k \leq K$. Für $f_k(z) = z - z_k$, $z \in \mathbb{C}$, gilt nach Lemma 5.3.1

$$\int_0^{2\pi} \log|f_k(Re^{i\theta})|\,d\theta = \int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - z_k|\,d\theta$$

$$= 2\pi \log R + \int_0^{2\pi} \log\Big|e^{i\theta} - \underbrace{\frac{z_k}{R}}_{=: a \in B_1(0)}\Big|\,d\theta$$

$$\overset{(t=-\theta)}{=} 2\pi \log R - \underbrace{\int_0^{2\pi} \log|1 - a e^{it}|\,dt}_{=0} = 2\pi \log R.$$

Es folgt

$$\log |f_k(0)| = \log |z_k| =$$

$$= \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \log R$$

$$= \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f_k(Re^{i\theta})|\, d\theta .$$

Mit i) – iii) liefert dies die Aussage des Satzes. $\square$

Für holomorphes $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $r > 0$ sei

$$n(r) = n_f(r) = \#\{z \in B_r(0);\ f(z) = 0\},$$

wobei jede Nullstelle mit ihrer Multiplizität gezählt wird.

Lemma 5.3.2. Für $R>0$ gilt

$$\int_0^R n(r)\,\frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{K} \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right),$$

falls $f(0)\neq 0$, wobei $z_1,\dots,z_K \in B_R(0)$ die Nullstellen von f mit Multiplizität bezeichnet.

Bew.: Für $1\leq k\leq K$ gilt

$$\int_{|z_k|}^{R} \frac{dr}{r} = \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right).$$

Mit $\chi_k(r) = \begin{cases} 1, & r>|z_k| \\ 0, & r\leq |z_k| \end{cases}, \quad 1\leq k\leq K,$

folgt $n(r) = \sum_{k=1}^{K}\chi_k(r)$, $0<r<R$, also

$$\int_0^R n(r)\,\frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{K}\int_0^R \chi_k(r)\,\frac{dr}{r}$$

$$= \sum_{k=1}^{K}\int_{|z_k|}^{R}\frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{K}\log\left(\frac{R}{|z_k|}\right).$$

$\square$

Def. 5.3.1: Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $\rho > 0$.

i) Die Funktion f hat Wachstumsordnung $\leq \rho$, falls gilt

$$\exists\, A, B > 0 \ \forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq A \exp(B|z|^\rho).$$

ii) Die Ordnung des Wachstums von f ist dann

$$\rho_f := \inf\{\rho > 0;\ f \text{ hat Wachstumsordng.} \leq \rho\}.$$

Beisp. 5.3.1. Für $f(z) = e^{z^2}$, $z \in \mathbb{C}$, gilt $\rho_f = 2$.

Satz 5.3.3. Sei f ganz mit $\rho_f < \rho$. Dann gilt

i) $\exists\, C, R > 0 \ \forall r > R : n(r) \leq C r^\rho$.

ii) Sind $z_1, z_2, \dots$ die Nullstellen von f mit Multiplizität, so gilt für jedes $s > \rho$, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s} < \infty.$$

Bew.: i) OBdA dürfen wir annehmen, daß $f(0) \neq 0$. Betrachte sonst die holomorphe Funktion $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = f(z)/z^{n_0}$, wobei $n_0 \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$ ist, mit $\rho_g \leq \rho_f$. Mit $n_g(r) \leq C r^\rho$ folgt dann auch i) für f.

Mit Lemma 5.3.2 und Satz 5.3.1 erhalten wir für ganzes f mit $f(0) \neq 0$ für $R > 0$ mit $f(z) \neq 0$ für $|z| = R$ die Identität

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \, d\theta - \log |f(0)|$$

$$= - \sum_{k=1}^{K} \log \left| \frac{z_k}{R} \right| = \sum_{k=1}^{K} \log \left(\frac{R}{|z_k|} \right) = \int_0^R n(s) \frac{ds}{s} .$$

Da $n(s) \geq 0$, folgt für $R = 2r$ somit

$$\int_r^{2r} n(s) \frac{ds}{s} \leq \int_0^{2r} n(s) \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \, d\theta - \log |f(0)| ,$$

und
$$\int_r^{2r} n(s) \frac{ds}{s} \geq n(r) \int_r^{2r} \frac{ds}{s} = \log 2 \cdot n(r) ,$$

da $n(r)$ nicht fallend.

Die Wachstumsannahme $\rho_f < \rho$ ergibt andererseits

$$\log |f(Re^{i\theta})| \leq \log \left(A \exp \left(B R^{\rho} \right) \right) \leq C R^{\rho}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

für genügend großes $R \geq R_0 \geq 2$. Mit $R = 2r$ folgt

$$n(r) \leq C r^{\rho} , \quad r \geq r_0 \geq 1 .$$

ii) Da es wegen Kor. 3.4.2 höchstens endlich viele Nullstellen z_k mit $|z_k| \leq 1$ gibt, genügt es, $\sum_{|z_k| \geq 1} |z_k|^{-s}$ abzuschätzen. Dies gelingt mit i) mittels dyadischer Zerlegung

$$\sum_{|z_k| \geq 1} |z_k|^{-s} = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{2^j \leq |z_k| < 2^{j+1}} |z_k|^{-s} \Big)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-sj} \underbrace{n(2^{j+1})}_{\overset{i)}{\leq} C\, 2^{(j+1)\rho}} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\rho-s)j} < \infty,$$

da $2^{\rho-s} < 1$ für $s > \rho$. □

<u>Beisp.</u> 5.3.2. Die ganze Funktion

$$f(z) = \sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C},$$

hat Ordnung $\rho_f = 1$ und einfache Nullstellen genau bei $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Da $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} |z_k|^{-s} = \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|k|^s} < \infty$

genau dann gilt, wenn $s > 1$, sieht man, daß die Aussage von Satz 5.3.3. ii) nicht verbessert werden kann.

Eine erste Anwendung des Begriffs der Ordnung des Wachstums einer ganzen Funktion f ist die folgende Verallgemeinerung des Maximumsprinzips für gewisse unbeschränkte Gebiete.

<u>Satz</u> 5.3.4 (Phragmén-Lindelöf)
Sei
$$S = \{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C};\ r > 0,\ |\theta| < \tfrac{\pi}{4} \},$$
und sei $f \in C^0(\bar{S}, \mathbb{C})$ holomorph in S mit $\rho_f \leq 1$ und mit
$$|f(z)| \leq 1 \quad , \quad z \in \partial S.$$
Dann gilt $|f(z)| \leq 1$ für jedes $z \in S$.

<u>Bem.</u> 5.3.1. Die Bedingung $\rho_f \leq 1$ ist notwendig, wie das Beispiel der Funktion $f(z) = e^{z^2}$, $z \in \mathbb{C}$, zeigt. Es gilt
$$z^2 = r^2 e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i r^2 \text{ für } z = re^{\pm i\pi/4} \in \partial S;$$
also $|f(z)| = 1$ für $z \in \partial S$; jedoch gilt
$$e^{x^2} \to \infty \quad (x \to \infty,\ x \in \mathbb{R}).$$
Siehe auch Übung

Bew. von Satz 5.3.4: Fixiere $1 < \alpha < 2$ und für $0 < \varepsilon < 1$ betrachte die Funktion

$$f_\varepsilon(z) = f(z)\, e^{-\varepsilon z^\alpha}, \quad z \in \overline{S},$$

wobei $z^\alpha = \exp(\alpha \log(z))$ wie oben definiert mit dem Hauptzweig des Logarithmus.

Für $z = re^{i\theta}$, $|\theta| \leq \pi/4$, gilt dann

$$\operatorname{Re}(z^\alpha) = r^\alpha \cos(\alpha\theta) \geq r^\alpha \cos(\alpha\pi/4)$$

mit $\cos(\alpha\pi/4) =: \beta > 0$. Da $\rho_f \leq 1$ folgt mit Konstanten $A, B > 0$ für $z \in S$:

$$|f_\varepsilon(z)| \leq |f(z)|\, e^{-\varepsilon\beta|z|^\alpha} \leq A\, e^{B|z|^{\frac{1+\alpha}{2}} - \varepsilon\beta|z|^\alpha} \underset{(|z| \to \infty)}{\longrightarrow} 0,$$

und es existiert $0 < R_\varepsilon \to \infty$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ mit

$$|f_\varepsilon(z)| \leq 1 \quad \text{für } z \in \partial(S \cap B_{R_\varepsilon}(0)).$$

Da $f_\varepsilon \in C^0(\overline{S \cap B_{R_\varepsilon}(0)})$ holomorph in S, ergibt das Maximumprinzip für jedes $R_0 > 0$

$$1 \geq \sup_{z \in S \cap B_{R_\varepsilon}(0)} |f_\varepsilon(z)| \geq \sup_{z \in S \cap B_{R_0}(0)} |f_\varepsilon(z)| \geq \sup_{z \in S \cap B_{R_0}(0)} |f(z)|\, e^{-\varepsilon R_0^\alpha},$$

falls $\varepsilon > 0$ genügend klein, so daß $R_0 < R_\varepsilon$. Da $R_0 > 0$ beliebig, folgt mit $\varepsilon \downarrow 0$ die Behauptung. $\square$

Ganze Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen kann man z.B. durch Produktdarstellungen gewinnen.

Def. 5.3.2 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

konvergiert, falls $\lim\limits_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+a_n) =: A$ existiert, und $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) := A$.

Lemma 5.3.3. Es gelte $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$. Dann konvergiert das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$,

$$A := \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren, und $A = 0$ gdw. $1+a_{n_0} = 0$ für ein $n_0\in\mathbb{N}$.

Bew.: Mit $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$ folgt die Existenz von $n_0\in\mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : |a_n| < \frac{1}{2}.$$

i) Zunächst wollen wir annehmen $n_0 = 1$, und der Hauptzweig des Logarithmus ist für alle Terme $1+a_n$ definiert mit

$$1 + a_n = \exp\left(\log(1+a_n)\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für $N \in \mathbb{N}$ folgt

$$\prod_{n=1}^{N} (1+a_n) = \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \log(1+a_n)\right),$$

wobei

$$\log(1+a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + \frac{a_n^3}{3} - \ldots$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-a_n)^k}{k} \quad ;$$

also für $|a_n| \leq \frac{1}{2}$

$$|\log(1+a_n)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|^k = \frac{|a_n|}{1-|a_n|} \leq 2|a_n|.$$

Mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ folgt somit, daß die Reihe

$$\mathcal{B} := \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$$

absolut konvergiert, unabhängig von der Summationsreihenfolge, und $\prod_{n=1}^{N} (1+a_n) \xrightarrow{(N\to\infty)} e^{\mathcal{B}} =: \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$.

Insbesondere ist $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = e^{B} \neq 0$.

ii) Falls allgemein $n_0 \in \mathbb{N}$, so existiert weiterhin $\prod_{n=n_0}^{\infty}(1+a_n) =: A_0$ und damit auch

$$A = \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = A_0 \prod_{n=1}^{n_0-1}(1+a_n),$$

und

$$A = 0 \iff \exists\, 1 \leq n \leq n_0 : 1 + a_n = 0.$$

$\square$

Satz 5.3.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\forall z \in \Omega : |f_n(z) - 1| \leq c_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

für $c_n > 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. Dann konvergiert $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren, und $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ist holomorph.

Zudem gilt für $z \in \Omega$ mit $f_n(z) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} .$$

<u>Bew.:</u> i) Schreibe $f_n(z) = 1 + a_n(z)$

mit $|a_n(z)| \leq c_n$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \Omega$.

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c_n \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0$

und für $N \geq L \geq n_0$ schreibe $F_N(z) = \prod_{n=1}^{N} f_n(z)$,

$$F_N(z) - F_L(z) = \left(\prod_{n=L+1}^{N} f_n(z) - 1 \right) F_L(z) .$$

Gemäß Lemma 5.3.3 existiert

$$F(z) = \lim_{L \to \infty} F_L(z), \quad z \in \Omega,$$

und

$$|F(z)|, |F_L(z)| \leq \prod_{n=1}^{n_0} (1 + c_n) \exp\left(2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n\right) =: C_0,$$

gleichmäßig in $z \in \Omega$, $L \in \mathbb{N}$; zudem ist F unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

Weiter gilt analog zum Beweis von Lemma 5.3.3

$$|F_N(z) - F_L(z)| \leqslant C_0 \left| \prod_{n=L+1}^{N} f_n(z) - 1 \right|$$

$$= C_0 \left| \prod_{n=L+1}^{N} (1 + a_n(z)) - 1 \right|$$

$$= C_0 \left| \exp\Big(\sum_{n=L+1}^{N} \log(1 + a_n(z)) \Big) - 1 \right|$$

$$\leqslant C_0 \left| \exp\Big(2 \sum_{n=L+1}^{N} c_n \Big) - 1 \right|$$

$$\leqslant 4 C_0 \sum_{n=L+1}^{N} c_n \longrightarrow 0 \quad (N, L \to \infty),$$

gleichmäßig in $z \in \Omega$.

Nach Kor. 3.4.6 von Weierstrass ist F holomorph in Ω, und $F_N' \xrightarrow{(N\to\infty)} F'$ lokal glm.

ii) Falls für ein $z_0 \in \Omega$ gilt $f_n(z_0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, so ist wegen $|f_n - 1| \leqslant c_n < \frac{1}{2}$, $n \geqslant n_0$, die Bedingung $f_n(z) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, auch für alle $z \in B_R(z_0)$ für ein $R>0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ erfüllt und Lemma 5.3.3 ergibt $F(z) \neq 0$, $z \in B_r(z_0)$.

Lokal gleichmäßige Konvergenz

$F_N \to F$, $F_N' \to F'$ $(N \to \infty)$ ergibt daher

Konvergenz

$$\frac{F_N'(z)}{F_N(z)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \longrightarrow \frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

lokal gleichmäßig in $B_R(z_0)$.

Beachte, daß mit

$$|f_n(z)| \geq c = c(r) > 0 \quad \text{in } B_r(z_0)$$

für jedes $0<r<R$ und der Abschätzung

$$|f_n'(z)| \leq \frac{\max\limits_{\overline{B_R(z_0)}} |f_n|}{R-|z|} \leq \frac{c_n}{R-r} \quad \text{in } B_r(z_0)$$

gemäß der Cauchy-Ungleichung Bem. 3.4.1.i) auch die Reihe

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}, \quad z \in B_R(z_0),$$

lokal gleichmäßig absolut konvergiert. $\square$

Beisp. 5.3.3. Wir zeigen Eulers Produktformel

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Beachte, daß für jedes $z \in \mathbb{C}$ für $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}$ gilt

$$|f_n(z) - 1| \leq c_n = \frac{|z|^2}{n^2}, \quad \sum_{n \neq 0} c_n < \infty.$$

Den Beweis führen wir in 3 Schritten.

Beh. 1. Die Funktion $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ erfüllt

$$-\pi \frac{d}{dz} \cot(\pi z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

Bew.: Die Funktion

$$g(z) := \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \notin \mathbb{Z},$$

hat wegen

$$(z-n)\, g(z) = \frac{\pi^2 (z-n)^3 - (z-n)\left(\pi(z-n) + O((z-n)^3)\right)^2}{\sin^2(\pi(z-n))(z-n)^2} + O(z-n)$$

$$= O(z-n) \longrightarrow 0 \quad (z \to n, \ n \in \mathbb{Z})$$

hebbare Singularitäten bei $z \in \mathbb{Z}$.

Zudem gilt $g(z) = g(z+1)$, $z \in \mathbb{C}$,

und $|g(z)| \leq C$ für $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$.

Weiter gilt für $|\operatorname{Im}(z)| \to \infty$ sowohl

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} \leq \sum_{n \geq |z|}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2|z|}{|\operatorname{Im} z|^2} \to 0$$

als auch

$$|\sin(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \right| \longrightarrow \infty \, ;$$

also $|g(z)| \leq C$, gleichmäßig in $z \in \mathbb{C}$.

Mit Kor. 3.4.4 (Liouville) folgt

$$g \equiv \text{const.} = \lim_{|\operatorname{Im}(z)| \to \infty} g(z) = 0 .$$

$\square$

Beh. 2: Für $z \notin \mathbb{Z}$ gilt

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Beachte dabei, daß

$$\left| \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{z}{n(z-n)} \right| \leq \frac{2|z|}{n^2}, \quad |n| \geq 2|z|,$$

so daß die Summe absolut konvergiert für $z \notin \mathbb{Z}$ und Folglich können wir die Summe umordnen und erhalten

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{-n} \right) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

Bew. von Beh. 2: Gemäß Beh. 1 gilt für

$$h(z) := \pi \cot(\pi z) - \left(\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \right)$$

die Gleichung

$$\frac{d}{dz} h(z) = \pi \frac{d}{dz} \cot(\pi z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = 0;$$

also wegen $h(z) = -h(-z)$, $z \notin \mathbb{Z}$, $h(z) \equiv \text{const.} = 0$. $\square$

Betrachte nun

$$G(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}, \quad P(z) = z \prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right), \; z \in \mathbb{C},$$

mit

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z), \quad z \notin \mathbb{Z},$$

und

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{n\neq 0} \frac{2z}{n^2\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \frac{2z}{z^2-n^2} = \pi \cot(\pi z) = \frac{G'(z)}{G(z)}, \; z \notin \mathbb{Z}.$$

Es folgt für $z \notin \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$\left(\frac{P(z)}{G(z)}\right)' = \frac{P'(z)\,G(z) - G'(z)\,P(z)}{G^2(z)} = \frac{P(z)}{G(z)}\underbrace{\left(\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{G'(z)}{G(z)}\right)}_{=0} = 0,$$

und $\quad P(z) = c\, G(z)$

mit

$$c = \lim_{z\to 0} \frac{P(z)}{G(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = 1.$$

5.4 Die Gamma-Funktion

Für $s > 0$ gilt gemäß der klassischen Definition

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt. \tag{5.4.1}$$

Indem wir allgemein $t^s = \exp(s \cdot \log t)$ setzen, können wir Γ holomorph auf die rechte Halbebene erweitern.

<u>Satz</u> 5.4.1. Durch (5.4.1) wird eine holomorphe Funktion Γ für $\mathrm{Re}(s) > 0$ erklärt.

<u>Bew.</u>: Schreibe $\Gamma(s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Gamma_\varepsilon(s)$ mit

$$\Gamma_\varepsilon(s) = \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Da $s \mapsto t^s = \exp(s \log t)$ holomorph, ist $\Gamma_\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für jedes $\varepsilon > 0$ ebenfalls holomorph.

Mit

$$|e^{-t} t^{s-1}| = e^{-t} t^{\mathrm{Re}(s)-1}, \quad t > 0$$

folgt zudem lokal gleichmäßige Konvergenz

$$\Gamma_\varepsilon(s) \to \Gamma \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

für $\mathrm{Re}(s) > 0$. Mit Kor. 3.4.6 erhalten wir auch Konvergenz in C^1_{loc}, und Γ ist holomorph in $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$. □

Wir können Γ zu einer meromorphen Funktion $\Gamma : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ fortsetzen mit Hilfe der folgenden Beobachtung.

<u>Lemma</u> 5.4.1. Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s);$$

insbesondere erhalten wir so $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

<u>Bew.</u>: Für $\varepsilon > 0$ integriere partiell

$$\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-t} t^s \, dt = \left(e^{-t} t^s\right)\Big|_{t=\varepsilon}^{1/\varepsilon} + s \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-t} t^{s-1} \, dt \, .$$

Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ ergibt die behauptete Identität.

Mit
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, dt = 1$$
erhalten wir daraus auch für $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = \ldots = n!\,\Gamma(1) = n!$$

$\square$

Motiviert durch Lemma 5.4.1 definieren wir

$$F_1(s) := \frac{\Gamma(s+1)}{s}, \quad Re(s) > -1.$$

Dann ist F_1 eine in der Halbebene $Re(s) > -1$ meromorphe Funktion mit einem einfachen Pol bei $s=0$ und

$$\operatorname{res}_{s=0} F_1 = \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \neq 0}} s F_1(s) = \Gamma(1) = 1.$$

Da zudem für $Re(s) > 0$ gilt $F_1(s) = \Gamma(s)$, können wir Γ durch F_1 für $Re(s) > -1$ meromorph fortsetzen.

Iterieren wir dieses Verfahren, so erhalten wir die meromorphe Funktion

$$F_2(s) = \frac{F_1(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s}, \quad Re(s) > -2,$$

mit einfachen Polstellen bei $s=0$ und $s=-1$, und allgemein für $m \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$F_m(s) = \frac{F_{m-1}(s+1)}{s} = \dots = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)\cdots s}, \quad Re(s) > -m,$$

mit einfachen Polstellen bei $s = 0, -1, \dots, 1-m$, welche Γ meromorph auf die Halbebene $Re(s) > -m$

fortsetzt, mit Residuen

$$\operatorname{res}_{s=-k} F_m = \lim_{\substack{s\to -k\\ s\neq -k}} (s+k)\frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)\cdots s}$$

$$= \frac{\Gamma(m-k)}{(m-k-1)!\,(-1)(-2)\cdots(-k)} \stackrel{m}{=}$$

$$= \frac{(m-k-1)!\,(-1)^k}{(m-k-1)!\;k!} = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad 1 \leq k < m.$$

Im allgemeinen kann man $\Gamma(s)$ für $s \notin \mathbb{N}$ nicht explizit bestimmen. Der folgende Satz erlaubt jedoch die Berechnung von $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Satz 5.4.2. Es gilt für jedes $s \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Kor. 5.4.1. Es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Bew.: $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ erfüllt $\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \pi$ nach Satz 5.4.2. $\square$

Für den Beweis von Satz 5.4.2 benötigen wir ein Lemma.

<u>Lemma 5.4.2.</u> Für $0 < a < 1$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{r^{a-1}}{1+r}\,dr = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

<u>Bew.:</u> Substituieren wir $r = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, erhalten wir

$$\int_0^\infty \frac{r^a}{1+r}\,\frac{dr}{r} = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}\,dx}{1+e^x} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

gemäß Beisp. 4.1.3. $\square$

<u>Bew. von Satz</u> 5.4.2: Da $\Gamma(s)$ einfache Pole bei $s = 0, -1, -2, \ldots$ besitzt und $\Gamma(1-s)$ einfache Pole bei $s \in \mathbb{N}$, besitzt ihr Produkt $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)$ ebenso wie $\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ einen einfachen Pol bei jedem $s \in \mathbb{Z}$ und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Wegen der Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung genügt es daher, die Aussage für $0 < s < 1$ zu zeigen.

Beachte zunächst, daß für $0<s<1$ gilt

$$\Gamma(1-s) = \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{-s} d\tau \overset{(\tau = rt)}{=} t \int_0^\infty e^{-rt} (rt)^{-s} dr,$$

wobei $t>0$ beliebig.

Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge mit dem Satz von Fubini erhalten wir dann

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\,\Gamma(1-s)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} \left(t \int_0^\infty e^{-rt} (rt)^{-s} dr \right) dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(1+r)t}\, r^{-s}\, dr\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{r^{-s}}{1+r}\, dr \overset{(-s=a-1)}{=} \frac{\pi}{\sin(\pi(1-s))} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 5.4.2 benutzen und beachten, daß mit $0<s<1$ auch gilt $0<a=1-s<1$. $\square$

5.5 Die Riemannsche Zeta-Funktion

Für reelles $s > 1$ konvergiert die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} .$$

Wegen

$$|n^s| = |\exp(s \log(n))|$$
$$= \exp(\mathrm{Re}(s) \log(n)) = n^{\mathrm{Re}(s)}$$

konvergiert $\zeta(s)$ auch für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$, und $s \mapsto \zeta(s)$ ist holomorph in $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

Der folgende Satz zeigt eine enge Verbindung zwischen der ζ-Funktion und den Primzahlen.

<u>Satz</u> 5.5.1 (Euler) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - (1/p)^s} .$$

<u>Bew.</u>: Es genügt, die Identität für reelle $s > 1$ zu zeigen. Die Aussage für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ folgt dann aus der Analytizität der beiden Funktionsausdrücke.

Beachte, daß für jede Primzahl $p > 1$ und für jedes $s > 1$ gilt

$$\frac{1}{1-(1/p)^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^{sm} .$$

Weiter besitzt jedes $n \in \mathbb{N}$ gemäß dem Hauptsatz der Arithmetik eine eindeutige Produktzerlegung

$$n = p_1^{s_1} \cdots p_K^{s_K} ,$$

wo p_k prim, $s_k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq K$.

Für jedes $N = 2^M \in \mathbb{N}$ erhalten wir so die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{sM}}\right)$$

$$\leq \prod_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} \left(\frac{1}{1-(1/p)^s}\right) \leq \prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1}{1-(1/p)^s}\right),$$

und Grenzübergang $N \to \infty$ ergibt

$$\zeta(s) \leq \prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1}{1-(1/p)^s}\right).$$

Umgekehrt gilt für jedes Paar $M, N \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\prod_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \dots + \frac{1}{p^{sM}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) .$$

Nach Grenzübergang $M \to \infty$ folgt

$$\prod_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} \left(\frac{1}{1-(1/p)^s}\right) \leq \zeta(s) .$$

Grenzübergang $N \to \infty$ schließlich ergibt

$$\prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1}{1-(1/p)^s}\right) \leq \zeta(s)$$

und damit die Behauptung.

$\square$

Ähnlich zum Verfahren zur Fortsetzung von Γ kann man auch ζ zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ fortsetzen.

Analog zu Satz 5.4.2 gilt dann die fundamentale Beziehung

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s), \quad s \in \mathbb{C};$$

vgl. Salamon (4.69).

Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) < 0$ gilt:

i) $\mathrm{Re}(1-s) > 1$; also $\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1}{1-(1/p)^s}\right) \neq 0$ gemäß Lemma 5.3.3;

ii) $\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)\,\Gamma(s)} \neq 0$,

da $\Gamma(s) \cdot \sin(\pi s)$ für $\mathrm{Re}(s) < 1$ nur hebbare Singularitäten bei $s \in -\mathbb{N}_0$ besitzt;

iii) $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0$ gdw. $s/2 \in -\mathbb{N}$.

Also gilt $\zeta(s) \neq 0$ für $\mathrm{Re}(s) < 0$ außer an den "trivialen" Nullstellen $s \in -2\mathbb{N}$, und $\zeta(s) \neq 0$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ nach Lemma 5.3.3.

Folge: Außer den "trivialen" Nullstellen $s \in -2\mathbb{N}_0$ liegen alle Nullstellen von ζ im "kritischen Streifen" $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$.

Riemannsche Vermutung: Alle Nullstellen s von ζ mit $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ haben $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

Bem. 5.5.1. Hadamard hat gezeigt, daß $\zeta(s) \neq 0$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) = 1$, und damit bewiesen, daß gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1,$$

wobei

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{N};\ p \text{ prim},\ p \leq x\}.$$