# 6. Der Riemannsche Abbildungssatz

## 6.1 Beispiele

Für viele Gebiete $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ gibt es biholomorphe Abbildungen $f : \Omega \to \tilde{\Omega}$.

Beisp. 6.1.1. Die holomorphe Funktion

$$F(z) = \frac{i-z}{i+z}, \quad z = x+iy, \ y>0,$$

bildet die obere Halbebene

$$\mathbb{H} = \{ z = x+iy ; \ y>0 \}$$

biholomorph ab auf den Einheitsball

$$\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} ; \ |z| < 1 \} = B_1(0)$$

mit

$$F^{-1}(w) = G(w) = i \, \frac{1-w}{1+w}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Bew.: Es gilt

$$|F(x+iy)|^2 = \frac{|i(1-y)-x|^2}{|i(1+y)-x|^2} = \frac{x^2+(1-y)^2}{x^2+(1+y)^2} < 1$$

für $y>0$; also $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$. Zudem gilt

$$\operatorname{Im}(G(w)) = \operatorname{Im}\left( i \, \frac{(1-w)(1+\bar{w})}{|1+w|^2} \right) = \operatorname{Im}\left( i \, \frac{1-|w|^2}{|1+w|^2} \right) > 0$$

für $w \in \mathbb{D}$; also $G : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$.

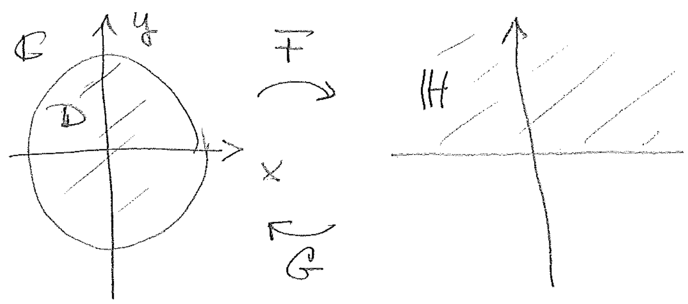
Weiter gilt

$$F(G(w)) = \frac{1 - \frac{1-w}{1+w}}{1 + \frac{1-w}{1+w}} = \frac{2w}{2} = w, \quad w \in \mathbb{D};$$

also ist $F$ surjektiv. Ebenso erhalten wir

$$G(F(z)) = i\,\frac{1 - \frac{i-z}{i+z}}{1 + \frac{i-z}{i+z}} = \frac{2iz}{2i} = z, \quad z \in \mathbb{H};$$

und die Behauptung folgt.




Beisp. 6.1.2. Die holomorphe Funktion

$$F(z) = z^2, \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < r < 1,$$

bildet den $\frac{1}{4}$-Kreis biholomorph ab auf den oberen Halbkreis $\mathbb{D}_+ = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{D};\ 0 < \theta < \pi\}$

mit

$$F^{-1}(w) = G(w) = \sqrt{w} = \exp\left(\frac{\log w}{2}\right),$$

wobei $\log$ der Hauptzweig des Logarithmus.

Beisp. 6.1.3. Wie in Kor. 3.4.9 gezeigt, sind alle biholomorphen Abbildungen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ Möbiustransformationen der Form

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

für ein $z_0 \in \mathbb{D}$ und ein $\theta \in \mathbb{R}$.

Weiter erinnern wir an das Schwarzsche Lemma, Satz 3.4.3:

Falls $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ holomorph mit $f(0) = 0$, so gilt $|f'(0)| \leq 1$, und falls $|f'(0)| = 1$, so gilt $f(z) = cz$, $z \in \mathbb{D}$, für ein $c = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$.

Def. 6.1.1. Im folgenden nennen wir zwei Gebiete $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ biholomorph, falls es eine biholomorphe Bijektion $f : \Omega \to \tilde{\Omega}$ gibt.

## 6.2 Der Riemannsche Abbildungssatz

Welche Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ sind biholomorph zu $\mathbb{D}$?

Offenbar muß gelten $\Omega \neq \mathbb{C}$, denn nach dem Satz von Liouville, Kor. 3.4.4, ist jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ konstant (da $|f(z)| < 1$, $z \in \mathbb{C}$).

Da topologische Eigenschaften unter bi-stetigen Bijektionen (und daher auch unter bi-holomorphen Abbildungen) erhalten bleiben, ist eine weitere Bedingung, daß $\Omega$ 1-zshg. sein muß.

Erstaunlicherweise sind diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend.

<u>Satz</u> 6.2.1 (Riemann). Sei $\emptyset \neq \Omega \neq \mathbb{C}$ offen, 1-zshg., $z_0 \in \Omega$. Dann gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $f: \Omega \to \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$. (Vgl. Beisp. 6.1.3.)

<u>Kor.</u> 6.2.1. Je zwei offene und 1-zshg Gebiete $\emptyset \neq \Omega, \tilde{\Omega} \neq \mathbb{C}$ sind zueinander biholomorph.

Zum Beweis von Satz 6.2.1 benötigen wir einige neue Begriffe. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

<u>Def.</u> 6.2.1. Eine Familie

$$\mathcal{F} \subset \{f: \Omega \to \mathbb{C};\ f \text{ holomorph}\} =: \mathcal{H}(\Omega)$$

heißt i) <u>beschränkt</u>, falls gilt $\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in \Omega} |f(z)| < \infty$;

ii) <u>gleichgradig stetig</u> auf $K \subset \Omega$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathcal{F}\ \forall x, y \in K:$$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

iii) <u>normal</u>, falls jede Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ eine lokal[1] gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

---

[1] d.h., auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$

Weiter benötigen wir das folgende Resultat.

Lemma 6.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann gibt es kompakte Mengen $K_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Bew.: Die Folge

$$K_n = \{z \in \Omega;\ |z| \leq n,\ \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \geq \tfrac{1}{n}\},\quad n \in \mathbb{N},$$

hat die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Def. 6.2.2 Wir nennen eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Lemma 6.2.1 eine Ausschöpfung von $\Omega$.

Lemma 6.2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von $\Omega$, und sei $K \subset \Omega$ kompakt. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \mathring{K}_n$.

Bew.: Wegen $K \subset \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{K}_{n+1}$ gibt es $L \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{l=1}^{L-1} \mathring{K}_l \subset \mathring{K}_L$. $\square$

Zudem erinnern wir an den Satz von Arzelà-Ascoli.

<u>Satz</u> 6.2.2 (Arzelà-Ascoli) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0(K)$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Dann existiert eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $f \in C^0(K)$ mit

$$f_n \to f \text{ in } C^0(K) \quad (n \to \infty, n \in \Lambda).$$

<u>Bew.</u>: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ dicht. (Wähle z.B. $\{x_k^{(n)}; 1 \le k \le k_0(n), n \in \mathbb{N}\}$, wo für $n \in \mathbb{N}$ gilt $K \subset \bigcup_{k=1}^{k_0(n)} B_{1/n}(x_k^{(n)})$, $x_k^{(n)} \in K$.)

Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt, gibt es $C > 0$ mit

$$\forall k, n \in \mathbb{N}: |f_n(x_k)| \le \sup_{x \in K} |f_n(x)| \le C.$$

Gemäß dem Satz von Bolzano-Weierstrass existieren Teilfolgen $\mathbb{N} \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots$, so daß für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n(x_k) \to a_k =: f(x_k) \quad (n \to \infty, n \in \Lambda_k).$$

Für eine Diagonalfolge $\Lambda$ gilt dann

$$\forall k \in \mathbb{N}: f_n(x_k) \to f(x_k) \quad (n \to \infty, n \in \Lambda).$$

<u>Beh. 1:</u> $f$ ist gleichmäßig stetig auf $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$.

<u>Bew.:</u> Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig, gibt es $\delta > 0$ mit

$$\forall j, k \in \mathbb{N}: |x_j - x_k| < \delta \Longrightarrow$$

$$|f(x_j) - f(x_k)| = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \Lambda}} |f_n(x_j) - f_n(x_k)| \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Da $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ dicht, können wir $f$ zu einer Funktion $f \in C^0(K)$ fortsetzen.

<u>Beh. 2:</u> $f_n \to f$ in $C^0(K)$ $(n \to \infty, n \in \Lambda)$.

<u>Bew.:</u> Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dazu $\delta > 0$ wie im Beweis von Beh. 1. Endlich viele Bälle $B_\delta(x_1), \ldots, B_\delta(x_J)$ überdecken $K$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0: |f_n(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq J.$$

Zu $x \in K$ gibt es $j \in \{1, \ldots, J\}$ mit $|x - x_j| < \delta$; also

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)|$$
$$< 3\varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Da $x \in K$ beliebig, folgt die Behauptung. $\square$

<u>Satz</u> 6.2.3 (Montel) Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ lokal beschränkt im Sinne, daß für jedes kompakte $K \subset \Omega$ gilt

$$\exists\, C > 0\ \forall z \in K\ \forall f \in \mathcal{F} : |f(z)| \leq C.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ normal.

<u>Bew.:</u> Sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von $\Omega$ wie in Lemma 6.2.1, und sei $K \subset \Omega$ kompakt. Wegen Lemma 6.2.2 genügt es, $K = K_n$ zu betrachten für ein $n \in \mathbb{N}$.

<u>Beh. 1:</u> $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig auf $K_n$.

<u>Bew.:</u> Da $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ gemäß Lemma 6.2.1 gibt es zu $z \in K_n$ ein $r = r(z) > 0$ mit $B_{3r}(z) \subset \mathring{K}_{n+1}$, und endlich viele Bälle $B_{r_j}(z_j)$, $z_j \in K$, $r_j = r(z_j)$, $1 \leq j \leq J$, überdecken $K_n$.

Mit der Cauchy-Ungleichung, Bem. 3.4.1. i), folgt

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\max\limits_{z \in B_{r_j}(z_0)} |f(z)|}{r_j} \leq \frac{\max\limits_{z \in K_{n+1}} |f(z)|}{\min\{r_j ; 1 \leq j \leq J\}} =: C_1$$

für $z_0 \in B_{2r_j}(z_j)$, da $B_{r_j}(z_0) \subset \overline{B_{3r_j}(z_j)} \subset K_{n+1} \subset \Omega$.

gleichmäßig für $f \in \tilde{\mathcal{F}}$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben

Für $z, w \in K_n$ mit $|z-w| < \delta < \min\left(\{r_j; 1 \leq j \leq \ell\} \cup \{\frac{\varepsilon}{C_1}\}\right)$

wähle $z_j$ mit $z \in B_{r_j}(z_j)$. Dann gilt $w \in B_{2r_j}(z_j)$

und

$$|f(z) - f(w)| = \left| \int_0^1 f'(w + t(z-w))(z-w)\,dt \right|$$

$$\leq \max_{0 \leq t \leq 1} \underbrace{\left| f'(\overbrace{w + t(z-w)}^{\in B_{2r_j}(z_j)}) \right|}_{\leq C_1} \cdot \underbrace{|z-w|}_{< \delta} < C_1 \delta < \varepsilon,$$

gleichmäßig für $f \in \tilde{\mathcal{F}}$. Die Beh. folgt. $\square$

Die Behauptung des Satzes folgt nun

mit Satz 6.2.2. $\square$

<u>Bew. von Satz</u> 6.2.1: Der Beweis erfolgt in 3 Schritten. Sei $\emptyset \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$ offen und 1-zshg.

<u>Beh. 1</u>: Es gibt ein offenes $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{D}$ mit $g: \Omega \to \tilde{\Omega}$ biholomorph.

<u>Bew.</u>: Da $\Omega \neq \mathbb{C}$ existiert $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Da $\Omega$ 1-zshg. liefert Satz 5.2.2 $g: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$e^{g(z)} = z - w_0 \ (\neq 0), \quad z \in \Omega.$$

Dann ist $g$ injektiv: Falls nämlich $g(z_1) = g(z_2)$ für $z_1, z_2 \in \Omega$, so folgt mit

$$z_1 - w_0 = e^{g(z_1)} = e^{g(z_2)} = z_2 - w_0$$

sofort die Gleichheit $z_1 = z_2$.

Fixiere $z_0 \in \Omega$. Es existiert $\delta > 0$ mit

$$\forall z \in \Omega: \ |g(z) - g(z_0) - 2\pi i| > \delta.$$

Andernfalls gibt es $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ mit $g(z_n) \to g(z_0) + 2\pi i \ (n \to \infty)$; also

$$z_n - w_0 = e^{g(z_n)} \underset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} e^{2\pi i} \cdot e^{g(z_0)} = z_0 - w_0$$

und $z_n \to z_0$, $g(z_n) \to g(z_0) \ (n \to \infty)$. ↯

Die holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{\delta}{g(z) - g(z_0) - 2\pi i}, \quad z \in \Omega$$

ist dann injektiv und $|f(z)| < 1$, $z \in \Omega$.
Gemäß Kor. 4.3.2 definiert $f$ eine biholomorphe Abbildung $f: \Omega \to \tilde{\Omega} := f(\Omega) \subset \mathbb{D}$.
$\square$

Gemäß Bem. 1 können wir annehmen $\Omega = \tilde{\Omega} \subset \mathbb{D}$. Allenfalls nach einer geeigneten Möbiustransformation $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ gilt weiter $0 \in \Omega \subset \mathbb{D}$. Betrachte

$$\mathcal{F} = \{ f: \Omega \to \mathbb{D};\ f \text{ holomorph, injektiv, } f(0) = 0 \}.$$

Dann gilt $\mathcal{F} \neq \emptyset$, da $f = id \in \mathcal{F}$.
Weiter ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt mit

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq 1, \quad f \in \mathcal{F}.$$

Da $0 \in \Omega$, $\Omega$ offen, gibt es $R > 0$ mit

$B_R(0) \subset \Omega$, und mit der Cauchy-Ungleichung, Bem. 3.4.1, i), folgt

$$s := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)| \leq \sup_{f \in \mathcal{F}} \left( \frac{\max_{|z| \leq R} |f(z)|}{R} \right) \leq \frac{1}{R} < \infty .$$

Wegen $f = id \in \mathcal{F}$ gilt zudem $s \geq 1$.

Beh. 2: Es gibt $f \in \mathcal{F}$ mit $|f'(0)| = s$.

Bew.: Wähle $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ mit $|f_n'(0)| \xrightarrow{(n \to \infty)} s$.

Gemäß dem Satz von Montel, Satz 6.2.3, gibt es eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $f_n \to f$ $(n \to \infty, n \in \Lambda)$, wo $f \in C^0(\Omega; \overline{\mathbb{D}})$.

Nach Kor. 3.4.6 von Weierstrass ist $f$ sogar holomorph, und $f_n' \to f'$ $(n \to \infty, n \in \Lambda)$ lokal gleichmäßig; insbesondere gilt

$$|f'(0)| = \lim_{n \to \infty, n \in \Lambda} |f_n'(0)| = s \geq 1 > 0 .$$

Also ist $f$ nicht konstant, und das Maximumprinzip, Kor. 3.4.7, ergibt

$$|f(z_0)| < \max_{z \in \overline{B}} |f(z)| \leq 1$$

für jedes $z_0 \in \Omega$, wo $z_0 \in B = B_r(z_0) \subset \overline{B} \subset \Omega$.

Schließlich ist $f$ auch injektiv, $f \in \mathcal{F}$. Andernfalls gibt es $z_1 \neq z_2$ in $\Omega$ mit $f(z_1) = f(z_2)$. Die Funktionen

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1), \quad z \in \Omega,$$

besitzen dann genau die Nullstelle $z = z_1$, $n \in \mathbb{N}$, und $g_n \to g$ in $C^1_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$, wo

$$g(z) = f(z) - f(z_1), \quad z \in \Omega.$$

Da $f'(0) \neq 0$, ist auch $g$ nicht konstant. Die Nullstelle $z = z_2$ von $g$ ist daher nach Kor. 3.4.3 isoliert, und für hinreichend kleines $r > 0$ folgt mit Satz 4.3.1

$$1 \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_2)} \frac{g'(z)}{g(z)} \, dz =: m.$$

Andererseits folgt mit $g_n \xrightarrow{(n \to \infty)} g$ in $C^1_{loc}$ und Satz 4.3.1 jedoch

$$m = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_2)} \frac{g_n'(z)}{g_n(z)} \, dz = 0,$$

da $g_n \neq 0$ in $B_r(z_2)$. Widerspruch! $\square$

Beh. 3: $f: \Omega \to \mathbb{D}$ ist biholomorph.

Bew.: Nimm widerspruchsweise an, es gibt $a \in \mathbb{D}$ mit $f(z) \neq a$, $z \in \Omega$.

Sei $\psi_a: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ die Möbiustransformation

$$\psi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a} z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

mit $\psi_a(a) = 0$. Dann ist $\psi \circ f: \Omega \to \mathbb{D}$ biholomorphe Abbildung auf die 1-zshg Menge

$$U = \psi(f(\Omega)) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}.$$

Gemäß Satz 5.2.2 gibt es einen Zweig $\log_U: U \to \mathbb{C}$ des Logarithmus. Setze

$$g(w) = \exp\left(\frac{\log_U(w)}{2}\right) \text{"}= w^{1/2}\text{"}, \quad w \in U,$$

und betrachte die holomorphe Funktion

$$F = \psi_{g(a)} \circ g \circ \psi_a \circ f: \Omega \to \mathbb{D},$$

wo

$$\psi_{g(a)}(z) = \frac{g(a) - z}{1 - \overline{g(a)}\, z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

so daß $F(0) = 0$.

Weiter ist $F$ injektiv; also $F \in \mathcal{F}$.

Mit $h(w) = w^2 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ erhalten wir

die Darstellung

$$f = \psi_a^{-1} \circ h \circ \psi_{g(a)}^{-1} \circ F =: \Phi \circ F,$$

wo

$$\Phi = \psi_a^{-1} \circ h \circ \psi_{g(a)}^{-1} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} .$$

Beachte, daß $\Phi$ holomorph ist aber <u>nicht</u> injektiv. Da weiter gilt

$$\Phi(0) = \psi_a^{-1}\Big(\underbrace{h(g(a))}_{=a}\Big) = 0,$$

liefert das Schwarzsche Lemma, Satz 3.4.3, die Abschätzung

$$|\Phi'(0)| < 1$$

und damit den Widerspruch

$$s = |f'(0)| = |\Phi'(0)|\,|F'(0)| < |F'(0)| \leq s .$$

□

Bem. 6.2.1. i) Der von Riemann ursprünglich konzipierte Beweis benutzte einen anderen Ansatz: Falls $f : \Omega \to \mathbb{D}$ biholomorph mit $f(z_0) = 0$, so gilt

$$f(z) = (z - z_0)\, g(z) \;, \quad z \in \Omega,$$

mit einer holomorphen Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$, wobei $g(z) \neq 0$, $z \in \Omega$, da $f$ injektiv.

Gemäß Satz 5.2.2 gibt es eine holomorphe Funktion $G : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = e^{G(z)} \;, \quad z \in \Omega.$$

Falls wir annehmen, daß $f, g \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$, so erhalten wir zusätzlich die Randbedingung

$$|f(z)| = |z - z_0| \exp\big(\mathrm{Re}(G(z))\big) = 1, \quad z \in \partial\Omega,$$

und $u := \mathrm{Re}(G)$ löst das Randwertproblem

$$(6.2.1) \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$(6.2.2) \quad u(z) = \log\left(1/|z - z_0|\right), \quad z \in \partial\Omega;$$

vgl. Abschnitt 2.5.

Riemann schlägt vor, das Dirichlet-Problem (6.2.1)-(6.2.2) mit Hilfe des "Dirichletschen Prinzips" zu lösen.

Bestimmt man dann noch eine zur Lösung $u$ konjugierte harmonische Funktion $v$ wie in Abschnitt 2.5, so hat man einen Ansatz für $G$ und damit für $f$ gefunden.

Es bleibt jedoch zu zeigen, daß das so konstruierte $f$ injektiv und damit biholomorph ist.

ii) Der hier vorgestellte Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes geht zurück auf P. Koebe (1914).

iii) Der Riemannsche Abbildungssatz läßt sich verallgemeinern zum von Felix Klein, Paul Koebe und Henri Poincaré bewiesenen Uniformisierungssatz für Riemannsche Flächen.