6. Der Riemannsche Abbildungssatz

6.1 Beispiele

Für viele Gebiete $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ gibt es biholomorphe Abbildungen $f : \Omega \to \tilde{\Omega}$.

Beisp. 6.1.1. Die holomorphe Funktion

$$F(z) = \frac{i - z}{i + z}, \quad z = x + iy, \ y > 0,$$

bildet die obere Halbebene

$$\mathbb{H} = \{ z = x + iy ; \ y > 0 \}$$

biholomorph ab auf den Einheitsball

$$\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} ; \ |z| < 1 \} = B_1(0)$$

mit $\quad F^{-1}(w) = G(w) = i \frac{1 - w}{1 + w}, \quad w \in \mathbb{D}.$

Bew.: Es gilt

$$|F(x+iy)|^2 = \frac{|i(1-y) - x|^2}{|i(1+y) - x|^2} = \frac{x^2 + (1-y)^2}{x^2 + (1+y)^2} < 1$$

für $y > 0$; also $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$. Zudem gilt

$$\operatorname{Im}(G(w)) = \operatorname{Im}\left(i \frac{(1-w)(1+\bar{w})}{1 + |w|^2} \right) = \operatorname{Im}\left(i \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2} \right) > 0$$

für $w \in \mathbb{D}$; also $G : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$.

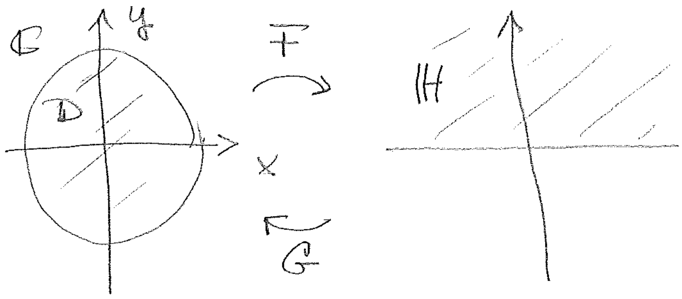
Weiter gilt

$$F(G(w)) = \frac{1 - \frac{1-w}{1+w}}{1 + \frac{1-w}{1+w}} = \frac{2w}{2} = w, \quad w \in \mathbb{D};$$

also ist F surjektiv. Ebenso erhalten wir

$$G(F(z)) = i\,\frac{1 - \frac{i-z}{i+z}}{1 + \frac{i-z}{i+z}} = \frac{2iz}{2i} = z, \quad z \in \mathbb{H};$$

und die Behauptung folgt.



<u>Beisp.</u> 6.1.2. Die holomorphe Funktion

$$F(z) = z^2, \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}, \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

bildet den $\frac{1}{4}$-Kreis biholomorph ab auf den oberen Halbkreis $\mathbb{D}_+ = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{D};\ 0 < \theta < \pi\}$

mit $\quad F^{-1}(w) = G(w) = \sqrt{w} = \exp\left(\frac{\log w}{2}\right),$

wobei $\log$ der Hauptzweig des Logarithmus.

Beisp. 6.1.3. Wie in Kor. 3.4.9 gezeigt, sind alle biholomorphen Abbildungen $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ Möbiustransformationen der Form

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

für ein $z_0 \in \mathbb{D}$ und ein $\theta \in \mathbb{R}$.

Weiter erinnern wir an das *Schwarzsche Lemma*, Satz 3.4.3:

Falls $f: \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ holomorph mit $f(0) = 0$, so gilt $|f'(0)| \leq 1$, und falls $|f'(0)| = 1$, so gilt $f(z) = cz$, $z \in \mathbb{D}$, für ein $c = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$.

Def. 6.1.3. Im folgenden nennen wir zwei Gebiete $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ *biholomorph*, falls es eine biholomorphe Bijektion $f: \Omega \to \tilde{\Omega}$ gibt.

6.2 Der Riemannsche Abbildungssatz

Welche Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ sind biholomorph zu $\mathbb{D}$?

Offenbar muß gelten $\Omega \neq \mathbb{C}$, denn nach dem Satz von Liouville, Kor. 3.4.4, ist jede holomorphe Abbildung $f: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ konstant (da $|f(z)| < 1$, $z \in \mathbb{C}$).

Da topologische Eigenschaften unter bi-stetigen Bijektionen (und daher auch unter bi-holomorphen Abbildungen) erhalten bleiben, ist eine weitere Bedingung, daß Ω 1-zshg. sein muß.

Erstaunlicherweise sind diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend.

Satz 6.2.1 (Riemann). Sei $\emptyset \neq \Omega \neq \mathbb{C}$ offen, 1-zshg., $z_0 \in \Omega$. Dann gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $f: \Omega \to \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.

Kor. 6.2.1. Je zwei offene und 1-zshg Gebiete $\emptyset \neq \Omega, \tilde{\Omega} \neq \mathbb{C}$ sind zueinander biholomorph.

Zum Beweis von Satz 6.2.1 benötigen wir einige neue Begriffe. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

Def. 6.2.1. Eine Familie

$$\mathcal{F} \subset \{f: \Omega \to \mathbb{C};\ f \text{ holomorph}\} =: \mathcal{H}(\Omega)$$

heißt

i) gleichgradig stetig auf $K \subset \Omega$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathcal{F}\ \forall x, y \in K:$$
$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ii) normal, falls jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ eine lokal[1] gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

---

[1] d.h., auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$

Weiter benötigen wir das folgende Resultat.

Lemma 6.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.
Dann gibt es kompakte Mengen $K_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$,
mit $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Bew.: Die Folge

$$K_n = \{ z \in \Omega ; |z| \leq n, \ dist(z, \partial\Omega) \geq \tfrac{1}{n} \}, \quad n \in \mathbb{N},$$

hat die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Def. 6.2.2 Wir nennen eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Lemma 6.2.1 eine Ausschöpfung von Ω.

Lemma 6.2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω, und sei $K \subset \Omega$ kompakt.
Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \mathring{K}_n$.

Bew.: Wegen $K \subset \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{K}_{n+1}$ gibt es $L \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{l=1}^{L-1} K_l \subset \mathring{K}_L$. $\square$

Zudem erinnern wir an den Satz von Arzelà-Ascoli.

<u>Satz</u> 6.2.2 (Arzelà-Ascoli) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0(K)$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Dann existiert eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $f \in C^0(K)$ mit

$$f_n \to f \text{ in } C^0(K) \quad (n \to \infty, n \in \Lambda).$$

<u>Bew.</u>: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ dicht. (Wähle z.B. eine Abzählung der rationalen Punkte in K.)

Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt, gibt es $C > 0$ mit

$$\forall k, n \in \mathbb{N}: |f_n(x_k)| \leq \sup_{x \in K} |f_n(x)| \leq C.$$

Gemäß dem Satz von Bolzano-Weierstrass existieren Teilfolgen $\mathbb{N} \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots$, so daß für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n(x_k) \to a_k =: f(x_k) \quad (n \to \infty, n \in \Lambda_k).$$

Für eine Diagonalfolge Λ gilt dann

$$\forall k \in \mathbb{N}: f_n(x_k) \to f(x_k) \quad (n \to \infty, n \in \Lambda).$$

Beh. 1: f ist gleichmäßig stetig auf $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig, gibt es $\delta > 0$ mit

$$\forall j, k \in \mathbb{N}: |x_j - x_k| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x_j) - f(x_k)| = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \Lambda}} |f_n(x_j) - f_n(x_k)| \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Da $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ dicht, können wir f zu einer Funktion $f \in C^0(K)$ fortsetzen.

Beh. 2: $f_n \to f$ in $C^0(K)$ $(n \to \infty, n \in \Lambda)$.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dazu $\delta > 0$ wie im Beweis von Beh. 1. Endlich viele Bälle $B_\delta(x_1), \dots, B_\delta(x_J)$ überdecken K. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0: |f_n(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq J.$$

Zu $x \in K$ gibt es $j \in \{1, \dots, J\}$ mit $|x - x_j| < \delta$; also

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)|$$

$$< 3\varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Da $x \in K$ beliebig, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 6.2.3 (Montel) Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ lokal beschränkt im Sinne, daß für jedes kompakte $K \subset \Omega$ gilt

$$\exists\, C > 0\ \forall z \in K\ \forall f \in \mathcal{F} : |f(z)| \leq C.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ normal.

Bew.: Sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω wie in Lemma 6.2.1, und sei $K \subset \Omega$ kompakt. Wegen Lemma 6.2.2 genügt es, $K = K_n$ zu betrachten für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beh. 1: $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig auf K_n.

Bew.: Da $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ gemäß Lemma 6.2.1 gibt es zu $z \in K_n$ ein $r = r(z) > 0$ mit $B_{3r}(z) \subset \mathring{K}_{n+1}$, und endlich viele Bälle $B_{r_j}(z_j)$, $z_j \in K$, $r_j = r(z_j)$, $1 \leq j \leq J$, überdecken K_n.

Mit der Cauchy-Ungleichung, Bem. 3.4.1. i), folgt

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\max_{z \in B_{r_j}(z_0)} |f(z)|}{r_j} \leq \frac{\max_{z \in K_{n+1}} |f(z)|}{\min\{r_j;\, 1 \leq j \leq J\}} =: C_1$$

für $z_0 \in B_{2r_j}(z_j)$, da $B_{r_j}(z_0) \subset B_{3r_j}(z_j) \subset K_{n+1}$, gleichmäßig für $f \in \mathfrak{F}$.

Für $z, w \in K_n$ mit $|z-w| < \delta < \min\{r_j; 1 \le j \le J\}$ wähle z_j mit $z \in B_{r_j}(z_j)$. Dann gilt $w \in B_{2r_j}(z_j)$ und

$$|f(z) - f(w)| = \left| \int_0^1 f'(w + t(z-w))(z-w)\,dt \right|$$

$$\le \max_{0 \le t \le 1} \underbrace{\left| f'(\overbrace{w + t(z-w)}^{\in B_{2r_j}(z_j)}) \right|}_{\le C_1} \cdot \underbrace{|z-w|}_{< \delta} < C_1 \delta,$$

gleichmäßig für $f \in \mathfrak{F}$. Die Beh. folgt. $\square$

Die Behauptung des Satzes folgt nun mit Satz 6.2.2. $\square$

<u>Bew.</u> <u>von</u> <u>Satz</u> 6.2.1: Der Beweis erfolgt in 3 Schritten.

<u>Beh. 1</u>: Es gibt ein offenes $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{D}$ mit $g: \Omega \to \tilde{\Omega}$ biholomorph.

<u>Bew.</u>: Da $\Omega \neq \mathbb{C}$ existiert $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.
Es gibt $g: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph gemäß Satz 5.2.2 mit

$$e^{g(z)} = z - w_0 \, (\neq 0), \quad z \in \Omega.$$

Dann ist g injektiv: Falls nämlich $g(z_1) = g(z_2)$ für $z_1, z_2 \in \Omega$, so folgt mit

$$z_1 - w_0 = e^{g(z_1)} = e^{g(z_2)} = z_2 - w_0$$

sofort die Gleichheit $z_1 = z_2$.

Fixiere $z_0 \in \Omega$. Es existiert $\delta > 0$ mit

$$\forall z \in \Omega: \; |g(z) - g(z_0) - 2\pi i| > \delta.$$

Andernfalls gibt es $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ mit $g(z_n) \to g(z_0) + 2\pi i \; (n \to \infty)$; also

$$z_n - w_0 = e^{g(z_n)} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} e^{2\pi i} \cdot e^{g(z_0)} = z_0 - w_0$$

und $z_n \to z_0$, $g(z_n) \to g(z_0)$ $(n \to \infty)$. ↯

Die holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{\delta}{g(z) - g(z_0) - 2\pi i}, \quad z \in \Omega$$

ist dann injektiv und $|f(z)| < 1$, $z \in \Omega$.
Gemäß Kor. 4.3.2 definiert f eine biholomorphe Abbildung $f: \Omega \to \tilde{\Omega} := f(\Omega) \subset \mathbb{D}$.

$\square$

Gemäß Beh. 1 können wir annehmen $\Omega = \tilde{\Omega} \subset \mathbb{D}$. Allenfalls nach einer geeigneten Möbiustransformation $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ gilt weiter $0 \in \Omega \subset \mathbb{D}$. Betrachte

$$\mathcal{F} = \{ f: \Omega \to \mathbb{D} ;\ f \text{ holomorph, injektiv, } f(0) = 0 \}.$$

Dann gilt $\mathcal{F} \neq \emptyset$, da $f = id \in \mathcal{F}$.
Weiter ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt mit

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq 1, \quad f \in \mathcal{F}.$$

Da $0 \in \Omega$, Ω offen, gibt es $R > 0$ mit

$B_R(0) \subset \Omega$, und mit der Cauchy-Ungleichung, Bem. 3.4.1, i), folgt

$$s := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)| \leq \sup_{f \in \mathcal{F}} \left(\frac{\max_{|z| \leq R} |f(z)|}{R} \right) \leq \frac{1}{R} < \infty.$$

Wegen $f = id \in \mathcal{F}$ gilt zudem $s \geq 1$.

<u>Beh. 2:</u> Es gibt $f \in \mathcal{F}$ mit $|f'(0)| = s$.

<u>Bew.:</u> Wähle $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ mit $|f_n'(0)| \xrightarrow{(n\to\infty)} s$.

Gemäß dem Satz von Montel, Satz 6.2.3, gibt es eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $f_n \to f$ $(n \to \infty, n \in \Lambda)$, wo $f \in C^0(\Omega; \overline{\mathbb{D}})$.

Nach Kor. 3.4.6 von Weierstrass ist f sogar holomorph, und $f_n' \to f'$ $(n \to \infty, n \in \Lambda)$ lokal gleichmäßig; insbesondere gilt

$$|f'(0)| = \lim_{n \to \infty, n \in \Lambda} |f_n'(0)| = s \geq 1 > 0.$$

Also ist f nicht konstant, und das Maximumprinzip, Kor. 3.4.7, ergibt

$$|f(z_0)| < \max_{z \in \overline{B}} |f(z)| \leq 1$$

für jedes $z_0 \in \Omega$, wo $z_0 \in B = B_r(z_0) \subset \overline{B} \subset \Omega$.

Schließlich ist f auch injektiv, $f \in \mathcal{F}$. Andernfalls gibt es $z_1 \neq z_2$ in Ω mit $f(z_1) = f(z_2)$. Die Funktionen

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1), \quad z \in \Omega,$$

besitzen dann genau die Nullstelle $z = z_1$, $n \in \mathbb{N}$, und $g_n \to g$ in $C^1_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$, wo

$$g(z) = f(z) - f(z_1), \quad z \in \Omega.$$

Da $f'(0) \neq 0$, ist auch g nicht konstant. Die Nullstelle $z = z_2$ von g ist daher nach Kor. 3.4.3 isoliert, und für hinreichend kleines $r > 0$ folgt mit Satz 4.3.1

$$1 \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_2)} \frac{g'(z)}{g(z)} \, dz =: m.$$

Andererseits folgt mit $g_n \xrightarrow{(n \to \infty)} g$ in C^1_{loc} und Satz 4.3.1 jedoch

$$m = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_2)} \frac{g_n'(z)}{g_n(z)} \, dz = 0,$$

da $g_n \neq 0$ in $B_r(z_2)$. Widerspruch!

$\square$

<u>Beh. 3:</u> $f : \Omega \to \mathbb{D}$ ist biholomorph.

<u>Bew.:</u> Nimm widerspruchsweise an, es gibt $a \in \mathbb{D}$ mit $f(z) \neq a$, $z \in \Omega$.

Sei $\psi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ die Möbiustransformation

$$\psi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a} z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

mit $\psi_a(a) = 0$. Dann ist $\psi \circ f : \Omega \to \mathbb{D}$ biholomorphe Abbildung auf die 1-zshg Menge

$$\mathcal{U} = \psi(f(\Omega)) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}.$$

Gemäß Satz 5.2.2 gibt es einen Zweig $\log_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ des Logarithmus. Setze

$$g(w) = \exp\left(\frac{\log_{\mathcal{U}}(w)}{2}\right) \text{"} = w^{1/2}\text{"}, \quad w \in \mathcal{U},$$

und betrachte die holomorphe Funktion

$$F = \psi_{g(a)} \circ g \circ \psi_a \circ f : \Omega \to \mathbb{D},$$

wo

$$\psi_{g(a)}(z) = \frac{g(a) - z}{1 - \overline{g(a)} z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

so daß $F(0) = 0$.

Weiter ist F injektiv; also $F \in \mathcal{F}$.

Mit $h(w) = w^2 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ erhalten wir die Darstellung

$$f = \psi_a^{-1} \circ h \circ \psi_{g(a)}^{-1} \circ F =: \Phi \circ F,$$

wo

$$\Phi = \psi_a^{-1} \circ h \circ \psi_{g(a)}^{-1} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}.$$

Beachte, daß Φ holomorph ist aber <u>nicht</u> injektiv. Da weiter gilt

$$\Phi(0) = \psi_a^{-1}\Big(\underbrace{h(g(a))}_{=a}\Big) = 0,$$

liefert das Schwarzsche Lemma, Satz 3.4.3, die Abschätzung

$$|\Phi'(0)| < 1$$

und damit den Widerspruch

$$s = |f'(0)| = |\Phi'(0)|\,|F'(0)| < |F'(0)| \leq s.$$

$\square$