

# Mathematische Methoden der Physik I

Vorlesungsnotizen

ETH Zürich, Wintersemester 1999/2000, zweite Auflage 2015, dritte Auflage 2019

Giovanni Felder  
D-MATH, ETH Zürich, CH-8092 Zürich  
Mit kleineren Ergänzungen von Thomas Willwacher

# Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Fourierreihen	3
1. Definition, Darstellungssatz	3
2. Riemann–Lebesgue-Lemma, Dirichletkern	4
3. Reellwertige Darstellung der Fourierreihen	7
4. Poisson’sche Summationsformel	8
5. Wärmeleitungsgleichung auf einem Ring	9
6. Satz von Fejér	11
Kapitel 2. Fouriertransformationen	15
1. Definition und elementare Eigenschaften	15
2. Fouriertransformierte von Gaussischen Funktionen	16
3. Weitere Beispiele ( $n = 1$ )	17
4. Umkehrsatz für $L^1$ -Funktionen	18
5. Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	21
6. Fouriertransformation von rotationsinvarianten Funktionen	24
7. Regularität und Abfalleigenschaften	29
8. Wellengleichung	31
9. Wärmeleitungsgleichung	33
Kapitel 3. Orthogonale Funktionensysteme, Hilberträume, Eigenwertprobleme	37
1. Beispiel: Die schwingende Saite	37
2. Orthogonale Systeme, Hilberträume	38
3. $L^2$ -Theorie der Fourierreihen	42
4. Hermite-Polynome und harmonischer Oszillator	43
5. Orthogonale Polynome, Legendre Polynome	45
6. Schwingungen einer kreisförmigen Membran	48
7. Kugelfunktionen	50
8. Kugelfunktionen–Originale Version des Kapitels	53
Kapitel 4. Distributionen (verallgemeinerte Funktionen)	59
1. Motivation	59
2. Temperierte Distributionen	59
3. Operationen auf Distributionen	60
4. Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	63
5. Fundamentallösungen für den Laplace-Operator	65
6. Fundamentallösungen und Fouriertransformationen	67
7. Retardierte Fundamentallösung für den d’Alembert-Operator	68
Kapitel 5. Dirichletproblem, harmonische Funktionen	71
1. Dirichlet und Neumannrandbedingungen	71
2. Greensche Funktionen	71
3. Methode der Spiegelbildladung, Poissonformel	73
Kapitel 6. Das Wasserstoffatom	77
1. Crashkurs Quantenmechanik	77

2. Wasserstoffatom	78
3. Laguerre Polynome	79
4. Lösung des Wasserstoffatoms	80
5. Lösungen der Laguerreschen Differentialgleichung	80
Literaturverzeichnis	83
Danksagung	83
Anhang A. Zusammenfassung der Lebesgue-Integrationstheorie	85
1. Masstheorie	85
2. Das Lebesguesche Integral	86
3. Konvergenzsätze	88
4. Der Satz von Fubini	88
5. $L^p$ -Räume	89

## KAPITEL 1

# Fourierreihen

### 1. Definition, Darstellungssatz

Sei  $L$  eine feste positive Zahl. Fourierreihen sind Reihen der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}, \quad x \in \mathbb{R}, f_n \in \mathbb{C}.$$

Konvergiert die Fourierreihe für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so ist die Summe  $f(x)$  periodisch mit Periode  $L$ , ( $L$ -periodisch):

$$f(x + L) = f(x).$$

Die klassische Theorie der Fourierreihen befasst sich mit der Frage, wann eine periodische Funktion sich als Fourierreihe schreiben lässt. Zuerst zeigen wir, dass wenn eine Fourierreihe absolut konvergiert, dann können die Koeffizienten aus der Summe gewonnen werden. Die grundlegende einfache Formel ist:

LEMMA 1.1.

$$\frac{1}{L} \int_0^L e^{\frac{2\pi i n}{L} x} dx = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 0 & n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

SATZ 1.2. Sei  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  so, dass  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| < \infty$ . Dann konvergiert die Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}$$

absolut und gleichmässig für alle  $x \in \mathbb{R}$  gegen eine periodische, stetige Funktion  $f$  der Periode  $L$ . Weiter gilt

$$f_n = \frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} f(x) dx.$$

*Beweis.* Da  $|f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}| = |f_n|$ , folgt die absolute Konvergenz. Die Gleichmässigkeit ergibt sich aus  $|f(x) - \sum_{|n| \leq N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}| \leq \sum_{|n| > N} |f_n|$ . Das heisst, die periodische Funktion  $f$  ist als gleichmässiger Limes der stetigen Funktionen  $\sum_{|n| \leq N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}$  stetig. Bei Gleichmässigkeit können Riemannsche Integrale mit Grenzwerten vertauscht werden:

$$\frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m e^{\frac{2\pi i m}{L} x} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m \frac{1}{L} \int_0^L e^{\frac{2\pi i}{L} (m-n)x} dx = f_n. \quad \square$$

BEISPIEL 1.1. Für  $|z| < 1$  ist die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{|n|} e^{inx}$$

eine absolut konvergente Fourierreihe mit Periode  $2\pi$ . Ihre Summe (geometrische Reihe) ist

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{|n|} e^{inx} = \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos x + z^2}.$$

Daraus folgt die Identität

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-z^2}{1-2z \cos x + z^2} e^{-inx} dx = z^{|n|}.$$

## 2. Riemann–Lebesgue-Lemma, Dirichletkern

Sei jetzt  $f$  eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion auf  $[0, L]$ . Für  $n \in \mathbb{Z}$  definiert man den  $n$ -ten *Fourierkoeffizient* von  $f$  durch

$$f_n = \frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi in}{L}x} f(x) dx.$$

BEMERKUNG 2.1. Ist  $f$  die Einschränkung auf  $[0, L]$  einer periodischen Funktion von  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Periode  $L$ , dann gilt auch

$$f_n = \frac{1}{L} \int_a^{a+L} e^{-\frac{2\pi in}{L}x} f(x) dx.$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ , da für beliebige (auf  $[0, L]$  integrierbare)  $L$ -periodische Funktionen  $g$  gilt

$$\int_a^{a+L} g(x) dx = \int_a^0 g(x) dx + \int_0^L g(x) dx + \int_L^{a+L} g(x) dx = \int_0^L g(x) dx.$$

SATZ 2.1. (*Riemann–Lebesgue Lemma für stetige Funktionen*) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $L$ -periodisch. Dann gilt

$$f_n \rightarrow 0 \quad (|n| \rightarrow \infty)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi in}{L}x} f(x) dx = \frac{1}{L} \int_{\frac{L}{2n}}^{L+\frac{L}{2n}} e^{-\frac{2\pi in}{L}x} f(x) dx \\ &\stackrel{x \rightarrow x+L/2n}{=} \frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi in}{L}x} e^{-i\pi} f\left(x + \frac{L}{2n}\right) dx \\ &= -\frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi in}{L}x} f\left(x + \frac{L}{2n}\right) dx. \end{aligned}$$

Also gilt

$$f_n = \frac{1}{2}(f_n + f_n) = \frac{1}{2L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi in}{L}x} \left[ f(x) - f\left(x + \frac{L}{2n}\right) \right] dx$$

Da  $f$  stetig auf dem kompakten Intervall  $[-L/2|n|, L+L/2|n|]$  ist, ist  $f$  gleichmäßig stetig.  $\forall \epsilon > 0, \exists N$  so, dass für  $|n| \geq N$   $|f(x) - f(x + \frac{L}{2n})| < \epsilon, \forall x \in [0, L]$ . Daraus folgt

$$|f_n| \leq \frac{1}{2L} \int_0^L \underbrace{|e^{-\frac{2\pi in}{L}x}|}_{=1} \underbrace{\left| f(x) - f\left(x + \frac{L}{2n}\right) \right|}_{< \epsilon} dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad \square$$

BEMERKUNG 2.2. Mit fortgeschrittener Technologie (stetige Funktionen sind dicht in  $L^1$ ) kann man zeigen, dass die Behauptung des Satzes von Riemann–Lebesgue für auf  $[0, L]$  Lebesgue-integrierbare Funktionen gilt (S. Satz 7.2).

KOROLLAR 2.2. Sei  $f \in C^k(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$  (d.h.  $f$   $k$ -mal stetig differenzierbar und  $L$ -periodisch), und seien  $f_n$  die Fourierkoeffizienten von  $f$ . Dann gilt

$$|n|^k |f_n| \rightarrow 0 \quad (|n| \rightarrow \infty)$$

*Beweis.* Wir setzen  $g := f^{(k)} := \frac{d^k}{dx^k} f$ . Dann folgt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} f(x) dx = (-1)^k \frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} f^{(k)}(x) \left(-\frac{L}{2\pi i n}\right)^k dx \\ &= \frac{L^k}{(2\pi i)^k} n^{-k} g_n. \end{aligned}$$

Mit dem Riemann-Lebesgue Lemma folgt:  $g_n \rightarrow 0$ , für  $|n| \rightarrow \infty$ . □

Betrachte nun die Partialsummen  $s_N f$  der Fourierreihe von  $f$

$$(s_N f)(x) := \sum_{n=-N}^N f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x} = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) \underbrace{\sum_{n=-N}^N e^{\frac{2\pi i n}{L} (x-y)} dy}_{=: D_N\left(\frac{x-y}{L}\right)}$$

DEFINITION 2.1. Die Funktion

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{2\pi i n t}.$$

heisst *Dirichlet-Kern*.

Der Dirichlet Kern besitzt folgende Eigenschaften:

- (i)  $D_N(t+1) = D_N(t) = D_N(-t)$
- (ii)  $\int_0^1 D_N(t) dt = 1$
- (iii)  $D_N(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}, & t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ 2N+1, & t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

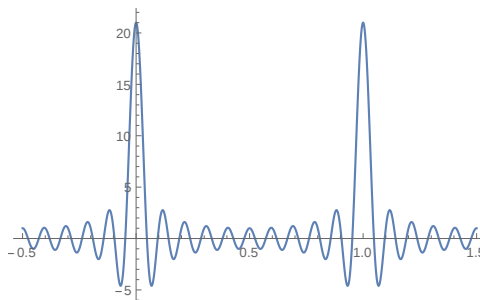


ABBILDUNG 1. Der Dirichlet Kern  $D_N(t)$  für  $N = 10$

*Beweis.* (i) ist klar, (ii) folgt aus Lemma 1.1. Für (iii) gilt:

$$\sum_{n=-N}^N e^{2\pi i n t} = \sum_{n=0}^{2N} e^{2\pi i n t - 2\pi i N t} = e^{-2\pi i N t} \frac{e^{2\pi i (2N+1)t} - 1}{e^{2\pi i t} - 1} = \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}. \quad \square$$

SATZ 2.3. Sei  $f \in C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ , und seien  $f_n$  die Fourierkoeffizienten von  $f$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x},$$

*Beweis.* Bezeichnen wir wieder die Partialsumme mit  $s_N f(x)$ , so gilt

$$\begin{aligned} s_N f(x) - f(x) &= \frac{1}{L} \int_0^L f(y) D_N \left( \frac{x-y}{L} \right) dy - f(x) \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L (f(y) - f(x)) D_N \left( \frac{x-y}{L} \right) dy, \end{aligned}$$

denn

$$\frac{1}{L} \int_0^L D_N \left( \frac{x-y}{L} \right) dy = \int_{-\frac{x}{L}}^{-\frac{x}{L}+1} D_N(t) dt = \int_0^1 D_N(t) dt = 1.$$

Definiere nun die Funktion

$$F_x(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{\sin(\pi \frac{x-y}{L})}, & \frac{x-y}{L} \notin \mathbb{Z}, \\ -(-1)^n \frac{L f'(x)}{\pi}, & \frac{x-y}{L} = n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Die Funktion  $F_x$  ist stetig nach der l'Hospital-Regel und  $2L$ -periodisch. Mit Hilfe dieser Funktion können wir nun den Satz beweisen:

$$\begin{aligned} s_N f(x) - f(x) &= \frac{1}{2L} \int_0^{2L} (f(y) - f(x)) D_N \left( \frac{x-y}{L} \right) dy \\ &= \frac{1}{2L} \int_0^{2L} (f(y) - f(x)) \frac{\sin((2N+1)\pi \frac{x-y}{L})}{\sin(\pi \frac{x-y}{L})} dy \\ &= \frac{1}{2L} \int_0^{2L} F_x(y) \frac{1}{2i} \left[ e^{i \frac{(2N+1)\pi}{L}(x-y)} - e^{-i \frac{(2N+1)\pi}{L}(x-y)} \right] dy \\ &= \frac{1}{2i} \left[ e^{i \frac{(2N+1)\pi}{L}x} (F_x)_{2N+1} - e^{-i \frac{(2N+1)\pi}{L}x} (F_x)_{-2N-1} \right] \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

nach Riemann–Lebesgue.  $\square$

**BEMERKUNG 2.3.** Der Beweis zeigt, dass die Fourierreihe einer stetigen Funktion  $f$  gegen  $f$  in allen Punkten konvergiert, wo  $f$  differenzierbar ist.

Wir zitieren noch ein allgemeineres Resultat (Dirichlet–Jordan Kriterium) über die Konvergenz von Fourierreihen. Eine Funktion  $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heisst *von beschränkter Variation* falls es eine Konstante  $V$  gibt, so dass  $\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq V$  für alle Einteilungen  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Stückweise stetig differenzierbare Funktionen<sup>1</sup> sind von beschränkter Variation mit  $V = \int_a^b |f'(x)| dx + V_s$  und  $V_s$  der Summe der Sprunghhen. Man kann zeigen, dass an jeder Unstetigkeitsstelle  $a$  einer Funktion von beschränkter Variation beide einseitigen Grenzwerte  $f(a \pm 0) := \lim_{x \rightarrow a \pm} f(x)$  existieren.

**SATZ 2.4.** Sei  $f$   $L$ -periodisch und von beschränkter Variation auf  $[0, L]$ , und  $s_N f(x) = \sum_{n=-N}^N f_n \exp(2\pi i n x / L)$  die  $N$ -te Partialsumme ihrer Fourierreihe. Dann gilt

- (i)  $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ . Insbesondere konvergiert die Fourierreihe gegen  $f(x)$  an allen Punkten  $x$  wo  $f$  stetig ist.
- (ii) Die Konvergenz ist gleichmässig auf jedem abgeschlossenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , wenn  $f$  in allen Punkten von  $I$  stetig ist.<sup>2</sup>

Den Beweis findet man in A. Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge University Press, Kap. II, §8.

Allerdings konvergiert die Fourierreihe einer Funktion in der Nähe einer Sprungstelle nicht gleichmässig: Nach dem *Gibbs-Phänomen* erreichen die Partialsummen

<sup>1</sup>Das heisst hier, Funktionen, die stetig differenzierbar sind bis auf endlich viele Sprungstellen, und in den Sprungstellen existieren die rechts- und linksseitigen Limites von  $f'$ .

<sup>2</sup>Achtung: Dies ist eine stärkere Bedingung als die Stetigkeit der Einschränkung von  $f$  auf  $I$ .

$s_N f$  für beliebig grosse  $N$  in der Nähe einer Sprungstelle einen Wert, der sich um ca. 9% der Sprunghöhe vom einseitigen Grenzwert unterscheidet (mehr in den Übungen). Diese “Überschwingungen” spielen in der Technik eine wichtige Rolle: Sendet man ein Signal mit Sprungstellen durch einen Kanal und werden höhere Fourierkoeffizienten in der Übertragung durch Verluste unterdrückt, so entsteht ein Signal, das höhere Amplitude als der Ausgangssignal hat. Der Kanal muss diese also ertragen können.

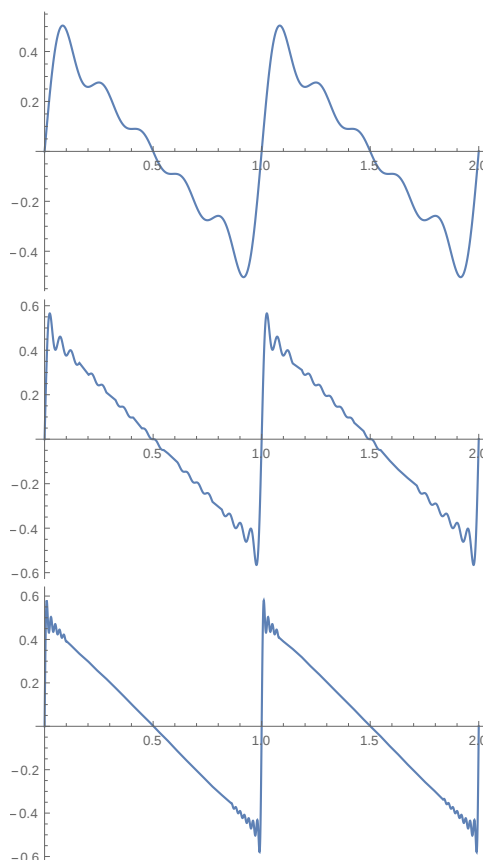


ABBILDUNG 2. Die  $N$ -te Partialsumme ( $N = 5, 20, 50$ ) der Fourierreihe der Funktion  $f(x) = 1/2 - x$ ,  $x \in [0, 1)$ , 1-periodisch fortgesetzt

### 3. Reellwertige Darstellung der Fourierreihen

Ist  $f$  eine reellwertige Funktion in  $C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x},$$

dann ist  $\bar{f}_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{\frac{2\pi i n}{L} x} dx = f_{-n}$ . Definiere  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  durch

$$f_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad n \geq 0.$$

Dann folgt

$$f_{-n} = \bar{f}_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n \geq 0,$$



und  $f$  kann in eine reelle Fourierreihe entwickelt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)\left(\cos\frac{2\pi n}{L}x + i\sin\frac{2\pi n}{L}x\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)\left(\cos\frac{2\pi n}{L}x - i\sin\frac{2\pi n}{L}x\right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $a_n$ ,  $b_n$  gewinnt man durch

$$\begin{aligned} a_n &= 2\operatorname{Re} f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx, \\ b_n &= -2\operatorname{Im} f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx. \end{aligned}$$

#### 4. Poisson'sche Summationsformel

Sei  $f \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $|f|, |f'| \leq C/(1+x^2)$ ,  $C > 0$ , und sei

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + kL),$$

$g \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $g(x+L) = g(x)$ . Die obige Reihe für die Funktion  $g$  konvergiert gleichmässig auf  $[0, L]$ , da für den Rest der Summe gilt:

$$\left| \sum_{|k| > N} f(x + kL) \right| \leq \sum_{|k| > N} \frac{C}{1 + |x + kL|^2} \leq \sum_{|k| > N} \frac{C}{|kL|^2} \rightarrow 0$$

gleichmässig für  $N \rightarrow \infty$ . Dasselbe gilt für die Ableitung von  $g$ . Also ist  $g \in C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ . Die Fourierkoeffizienten von  $g$  sind:

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{1}{L}\int_0^L \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + kL)e^{-\frac{2\pi in}{L}x} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{L}\int_0^L f(x + kL)e^{-\frac{2\pi in}{L}x} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{L}\int_{kL}^{kL+L} f(x)e^{-\frac{2\pi in}{L}x} dx = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\frac{2\pi in}{L}x} dx. \end{aligned}$$

DEFINITION 4.1. Die *Fouriertransformation* einer Funktion  $f$  mit  $\int_{\mathbb{R}} |f| dx < \infty$  ist die Funktion auf  $\mathbb{R}$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx.$$

Nun können wir  $g$  folgendermassen schreiben:

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + nL) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n e^{\frac{2\pi in}{L}x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{L} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{L}\right) e^{\frac{2\pi in}{L}x}.$$

Setzen wir nun  $x = 0$ , so bekommen wir die *Poisson'sche Formel*:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nL) = \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{L}\right).$$

Man kann zeigen dass diese Formel unter recht allgemeinen Voraussetzungen gilt: Sie gilt z. B. wenn  $f$  stetig und von beschränkter Variation ist und  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$  (S. Zygmund, Kap. II §13).

### 5. Wärmeleitungsgleichung auf einem Ring

Wir betrachten einen wärmeleitenden Ring mit Umfang  $L$ . Die Temperaturverteilung zur Zeit  $t$  sei durch die Funktion  $u(x, t)$  gegeben, wobei  $0 \leq x \leq L$ ,  $u(L, t) = u(0, t)$  gelten soll. Wir setzen  $u(\cdot, t)$  periodisch auf ganz  $\mathbb{R}$  fort durch  $u(x + L, t) = u(x, t)$ . Die Funktion  $u$  erfüllt die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

dabei ist  $D$  eine positive Konstante. Weiter sei folgende Anfangsbedingung zur Zeit  $t = 0$  vorgegeben:

$$u(x, 0) = f(x).$$

Wir wollen nun die Wärmeleitungsgleichung für den Ring mit der angegebenen Anfangsbedingung lösen. Zuerst bringen wir durch eine Streckung von  $x, t$  die Konstanten  $D, L$  auf eine angenehme Form, d.h.  $D = 1, L = 2\pi$ . Das Problem welches wir lösen wollen lautet also:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass  $f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  ist. Sei nun  $u$  eine  $C^\infty$ -Lösung. Kann  $u$  durch  $f$  ausgedrückt werden? Dazu entwickeln wir  $u$  in eine Fourierreihe, d.h.

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t) e^{inx}$$

mit Fourierkoeffizienten

$$u_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) e^{-inx} dx.$$

Falls nun  $u(x, t)$  für  $t \rightarrow 0$  gleichmässig gegen  $f$  konvergiert, ist

$$u_n(0) = f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Die Fourierkoeffizienten  $u_n(t)$  erfüllen die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) (-in)^2 e^{-inx} dx = -n^2 u_n(t). \end{aligned}$$

(Da  $u$  glatt ist, darf man unter dem Integral differenzieren). Also ergibt sich

$$u_n(t) = e^{-n^2 t} f_n$$

und somit

$$(1) \quad u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t + inx} f_n.$$

Umgekehrt behaupten wir, dass (1) eine  $C^\infty$ -Lösung unseres Wärmeleitungsproblems definiert. Denn es gilt:

- (1) Die Funktion  $u(x, t)$  ist unendlich oft differenzierbar für  $x \in \mathbb{R}, t \in (0, \infty)$ , und die partiellen Ableitungen ergeben sich durch Differenzieren unter dem Summenzeichen:

$$\partial_t^j \partial_x^k u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n^2)^j (in)^k e^{-n^2 t + inx} f_n$$

Dies kann wie folgt induktiv bewiesen werden. Die Ableitung nach  $t$  dieser Reihe ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-n^2 h} - 1}{h} (-n^2)^j (in)^k e^{-n^2 t + inx} f_n$$

und da  $|e^{-n^2 h} - 1| \leq n^2 |h| e^{n^2 t/2}$  für  $|h| \leq t/2$ , konvergieren die Partialsummen gleichmässig in der Variable  $h$ , und wir dürfen Limes und Summationszeichen vertauschen. Eine ähnliche Überlegung gilt für Ableitungen nach  $x$ .

- (2)  $\partial_t u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n^2) e^{-n^2 t + inx} f_n = \partial_x^2 u$   
(3)  $|u(x, t) - f(x)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |e^{-n^2 t} - 1| |f_n| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0$ .

Wir können (1) noch ein wenig umformen:

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t + inx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t + in(x-y)} f(y) dy.$$

Wir haben also folgendes Resultat bewiesen.

SATZ 5.1. Sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  und für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$

$$K(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t + inx}.$$

Dann ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x - y, t) f(y) dy$$

eine  $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times (0, \infty))$  Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

die gleichmässig gegen  $f$  für  $t \downarrow 0$  konvergiert, d.h.

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = f(x).$$

BEMERKUNG 5.1. Wir haben auch gezeigt, dass jede  $C^\infty$ -Lösung mit der Anfangsbedingung  $f$  mit  $u$  übereinstimmt, also ist die Lösung eindeutig.

BEMERKUNG 5.2.  $K(x, t)$  heisst Jacobische Theta-Funktion.

Die Theta-Funktion hat noch eine andere Darstellung welche wir jetzt mit Hilfe der Poisson'schen Summationsformel beweisen wollen. Dazu benötigen wir folgendes Lemma.

LEMMA 5.2. (Gauss) Sei  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4t}}$ . Dann gilt

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t} - ikx} dx = \sqrt{4\pi t} e^{-k^2 t}.$$

*Beweis.* Mit quadratischem Ergänzen folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t} - ikx} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4t}(x+2ikt)^2 - k^2 t} dx \\ &= \sqrt{4t} e^{-k^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \sqrt{4\pi t} e^{-k^2 t}, \end{aligned}$$

wobei die Substitution  $y = \frac{x+2ikt}{\sqrt{4t}}$  vorgenommen wurde. Die mit dieser Substitution erforderliche Verschiebung im Komplexen des Integrationsweges erfolgt mit dem

Satz von Cauchy. Wir werden später einen zweiten Beweis sehen, der die komplexe Analysis nicht verwendet.  $\square$

Nun können wir folgende Darstellung für den Wärmeleitungskern herleiten:

$$K(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(x-2\pi n)^2}{4t}}.$$

Aus dieser Darstellung ist es ersichtlich, dass  $K(x, t) > 0$ . Es folgt, dass die Lösung zu positiven Anfangsbedingungen positiv ist, eine für die physikalische Interpretation von  $u$  als Temperatur oder als Dichte wichtige Eigenschaft. Die Anwendung der Poisson'schen Formel

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + nL) = \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{L}\right) e^{\frac{2\pi i n}{L} x}$$

für  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4t}}$ ,  $L = 2\pi$ , ergibt nämlich

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(x-2\pi n)^2}{4t}} = \sqrt{\frac{t}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t + i n x}.$$

Aus der Positivität der Theta-Funktion folgt auch diejenige von  $u(x, t)$ , falls  $f \geq 0$  ist.

## 6. Satz von Fejér

Die Frage welche wir hier beantworten wollen ist, ob man eine stetige periodische Funktion aus ihren Fourierkoeffizienten gewinnen kann. Sei  $f$  eine stetige Funktion mit Periode 1. Der Fall der allgemeinen Periode kann durch Streckung von  $x$  auf diesen Fall zurückgeführt werden. Die Partialsummen

$$(s_N f)(x) = \sum_{n=-N}^N f_n e^{2\pi i n x} = \int_0^1 f(y) D_N(x-y) dy$$

sind im allgemeinen divergent.

DEFINITION 6.1. Die *Fejérschen Summen* sind arithmetische Mittel von Fourier Partialsummen:

$$(\sigma_N f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (s_n f)(x).$$

Also ist  $\sigma_N f(x) = \int_0^1 f(y) K_N(x-y) dy$ , wobei der *Fejérsche Kern*  $K_N$  durch

$$K_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t)$$

gegeben ist.

Der Fejérsche Kern hat folgende Eigenschaften:

- (i)  $K_N(t) = K_N(-t) = K_N(t+1)$
- (ii)  $\int_0^1 K_N(t) dt = 1$
- (iii)  $K_N(t) = \begin{cases} \frac{1}{N} \left[ \frac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)} \right]^2 & t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ N & t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Also ist  $K_N \geq 0$ .

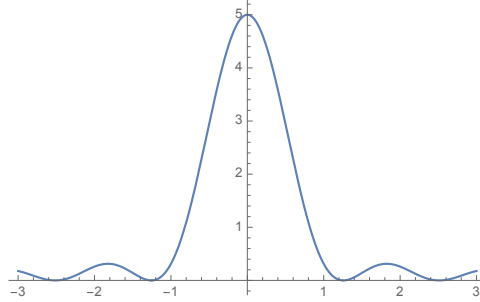


ABBILDUNG 3. Der Fejérsche Kern  $K_N(t)$  für  $N = 5$

*Beweis.* Die ersten beiden Behauptungen folgen aus den entsprechenden Eigenschaften des Dirichletkern. Zu zeigen bleibt (iii):

$$\begin{aligned}
 K_N(t) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} = \frac{1}{N \sin(\pi t)} \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{N-1} e^{(2n+1)i\pi t} \\
 &= \frac{1}{N \sin(\pi t)} \operatorname{Im} \frac{e^{2Ni\pi t} - 1}{e^{2i\pi t} - 1} e^{i\pi t} = \frac{1}{N \sin(\pi t)} \operatorname{Im} e^{Ni\pi t} \frac{e^{Ni\pi t} - e^{-Ni\pi t}}{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}} \\
 &= \frac{1}{N \sin(\pi t)} \operatorname{Im} e^{Ni\pi t} \frac{\sin(\pi Nt)}{\sin(\pi t)} = \frac{1}{N} \left[ \frac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)} \right]^2. \quad \square
 \end{aligned}$$

SATZ 6.1. (Fejér) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig,  $L$ -periodisch mit Fourierkoeffizienten  $f_n$ . Sei  $\sigma_N f$  die  $N$ te Fejérsche Summe

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^n f_m e^{\frac{2\pi i m}{L} x}.$$

Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\sigma_N f)(x) = f(x)$$

mit gleichmässiger Konvergenz.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass  $L = 1$  ist. Mit der Substitution  $t = y - x$  können wir schreiben:

$$\sigma_N f(x) = \int_0^1 f(y) K_N(x - y) dy = \int_0^1 f(x + t) K_N(t) dt.$$

Da  $\int_0^1 K_N(t) dt = 1$  folgt

$$\begin{aligned}
 |f(x) - \sigma_N f(x)| &= \left| \int_{-1/2}^{1/2} (f(x) - f(x+t)) K_N(t) dt \right| \\
 &\leq \int_{-1/2}^{1/2} |f(x) - f(x+t)| K_N(t) dt \\
 &= \int_{|t| < \delta} |f(x) - f(x+t)| K_N(t) dt \\
 &\quad + \int_{1/2 \geq |t| \geq \delta} |f(x) - f(x+t)| K_N(t) dt.
 \end{aligned}$$

Sei  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wähle  $\delta > 0$  so, dass  $|f(x) - f(x+t)| \leq \epsilon/2$  für  $|t| < \epsilon$  und für alle  $x$ . In der Region  $|t| \geq \delta$  schätzen wir  $K_N$  ab mittels

$$|\sin \pi t| \geq 2t, \quad |t| < \frac{1}{2}.$$

Also

$$K_N(t) \leq \frac{1}{N} \frac{1}{4t^2}.$$

Wir erhalten dann folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} \int_{|t| < \delta} |f(x) - f(x+t)| K_N(t) dt &< \frac{\epsilon}{2} \int_{-1/2}^{1/2} K_N(t) dt = \frac{\epsilon}{2}, \\ \int_{1/2 \geq |t| \geq \delta} |f(x) - f(x+t)| K_N(t) dt &\leq 2 \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \int_{1/2 \geq |t| \geq \delta} \frac{1}{N} \frac{1}{4t^2} dt \\ &\leq 2 \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \text{const} \frac{1}{N\delta} < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

für  $N$  gross genug ( $\sim 1/\delta$ ). Also

$$|f(x) - \sigma_N f(x)| < \epsilon. \quad \square$$

DEFINITION 6.2. Ein *trigonometrisches Polynom* ist eine endliche Linearkombination

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}.$$

KOROLLAR 6.2. Jede stetige periodische Funktion  $f$  kann gleichmässig durch trigonometrische Polynome beliebig gut approximiert werden.

*Beweis.* Die Fejérschen Summen sind eben trigonometrische Polynome

$$(\sigma_N f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=-n}^n f_j e^{\frac{2\pi i j}{L} x} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} (N - |n|) f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}. \quad \square$$

KOROLLAR 6.3. Seien  $f, g$  stetige,  $L$ -periodische Funktionen. Dann gilt:

- (i)  $f_n = g_n \Rightarrow f = g$ ,
- (ii)  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| < \infty \Rightarrow f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}$ .

*Beweis.* (i) folgt unmittelbar aus Satz 6.1. Nach Satz 1.2 definiert

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}$$

eine stetige Funktion mit  $\tilde{f}_n = f_n$ . Also nach (i)  $f = \tilde{f}$ . (ii) ist somit auch bewiesen.  $\square$



## Fouriertransformationen

### 1. Definition und elementare Eigenschaften

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Die Fouriertransformierte von  $f$  ist die Funktion auf  $\mathbb{R}^n$

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx,$$

wobei  $k \cdot x = \sum_{i=1}^n k_i x_i$ . Die inverse Fouriertransformierte von  $f$  ist

$$\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(k) e^{ik \cdot x} dk.$$

LEMMA 1.1. Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann sind die Funktionen  $\hat{f}, \check{f}$  gleichmässig stetig, und für alle  $x, k \in \mathbb{R}^n$  gilt  $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1, |\check{f}(x)| \leq (2\pi)^{-n} \|f\|_1$ .

*Beweis.* Sei  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq R\}$ . Dann gilt  $|f(x)\chi_{B_R}(x)| \leq |f(x)| \in L^1$ . Also nach dem Lebesgueschen Konvergenzatz

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Sei  $\epsilon > 0$  vorgegeben, und  $R$  so gross, dass  $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} f(x) dx < \epsilon/4$ . Dann

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k) - \hat{f}(l)| &\leq \int_{B_R} |f(x)| |e^{-ikx} - e^{-ilx}| dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |f(x)| |e^{-ikx} - e^{-ilx}| dx}_{\leq 2} \\ &\leq \int_{B_R} |f(x)| \left| e^{-i\frac{k}{2}x - i\frac{l}{2}x} \left( e^{-i\frac{k-l}{2}x} - e^{i\frac{k-l}{2}x} \right) \right| dx + \frac{\epsilon}{2} \\ &= 2 \int_{B_R} |f(x)| \underbrace{\left| \sin\left(\frac{k-l}{2}x\right) \right|}_{\leq \frac{|k-l|}{2}|x|} dx + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq |k-l|R \|f\|_1 + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \end{aligned}$$

für  $|k-l| < \epsilon/2R \|f\|_1$  falls  $\|f\|_1 \neq 0$ . Für  $\|f\|_1 = 0$  ist nichts zu beweisen. Offensichtlich  $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1$ . Die inverse Fouriertransformierte wird analog behandelt.  $\square$

**Elementare Eigenschaften.** (Übung). Seien  $f, g \in L^1, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

- (i)  $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$
- (ii)  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \widehat{f(\lambda \cdot)}(k) = |\lambda|^{-n} \hat{f}(k/\lambda)$
- (iii)  $\hat{f}_y(k) = \hat{f}(k) e^{-iky}$ , wobei  $f_y(x) = f(x-y)$
- (iv)  $\widehat{f\hat{g}}, \hat{f}g \in L^1$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f\hat{g}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g dx$
- (v)  $\hat{f}(k) = \widehat{\check{f}}(-k)$
- (vi)  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  und  $f, \partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widehat{\partial_j f} = ik_j \hat{f}$ . Ebenso  $x_1 f, \dots, x_n f, f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$  und  $\partial_j \hat{f} = \widehat{(-ix_j)f}$ .



## 2. Fouriertransformierte von Gausschen Funktionen

Wir wollen die Fouriertransformierte der Funktion  $f(x) = e^{-|x|^2/2}$ ,  $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ , berechnen. Wir betrachten zuerst den Fall  $n = 1$  und leiten unter dem Integralzeichen nach  $k$  ab:

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-ikx} dx \\ \frac{d}{dk} \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} (-ix) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} i \left( \frac{d}{dx} e^{-x^2/2} \right) e^{-ikx} dx \\ &\stackrel{\text{p.I.}}{=} - \int_{-\infty}^{\infty} i e^{-x^2/2} (-ik) e^{-ikx} dx = -k \hat{f}(k) \\ \hat{f}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

Also erhalten wir  $\hat{f}(k)$  als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung  $\hat{f}'(k) = -k\hat{f}(k)$  mit der Anfangsbedingung  $\hat{f}(0) = \sqrt{2\pi}$ .

$$\hat{f}(k) = e^{-k^2/2} \hat{f}(0) = \sqrt{2\pi} e^{-k^2/2}.$$

Die Vertauschbarkeit von Ableitung und Integral soll noch nachgewiesen werden:

**SATZ 2.1.** (*Vertauschen von Ableitung und Integral*)

Sei  $f: (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion so dass

- (1) Die Funktion  $x \mapsto f(t, x)$  ist integrierbar für alle  $t \in (a, b)$ .
- (2) Die partielle Ableitung  $f_t(t, x)$  existiert für alle  $(t, x) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n$ .
- (3) Es gibt eine integrierbare Funktion  $g$  auf  $\mathbb{R}^n$  so dass

$$|f_t(t, x)| \leq g(x) \quad \text{für alle } (t, x) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n.$$

Dann ist  $I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) dx$  differenzierbar für  $t \in (a, b)$  und es gilt

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}^n} f_t(t, x) dx.$$

*Beweis.* Nach Definition der Ableitung und wegen der Linearität des Integrals gilt (falls der Limes existiert):

$$\frac{dI(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h} dx.$$

Wir benutzen den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die differenzierbare Funktion  $t \mapsto f(t, x)$  bei festem  $x$ :

$$\left| \frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h} \right| = |f_t(\tau, x)| \leq g(x)$$

für ein gewisses  $\tau$  zwischen  $t$  und  $t+h$ . Also für eine beliebige Nullfolge  $h_n \rightarrow 0$  bilden die Differenzenquotienten im Integral eine von einer integrierbaren Funktion dominierte Folge. Der Satz der dominierten Konvergenz (Anhang A), Satz 3.2) kann also angewendet werden, um den Limes unter dem Integral zu berechnen. Die Funktion  $x \rightarrow f_t(t, x)$  ist also integrierbar und wir erhalten

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_t(t, x) dx$$

□

Es ist klar, dass  $f(k, x) = \exp(-|x|^2/2 + ikx)$  die Annahme des Satzes erfüllt.

Sei nun  $n$  beliebig. In diesem Fall kann das Integral auf dem Fall  $n = 1$  zurückgeführt werden. Nämlich:

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2 - ik \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2 - ik_j x_j} dx \\ &= \prod_{j=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_j^2 - ik_j x_j} dx_j \right) = \prod_{j=1}^n \sqrt{2\pi} e^{-k_j^2/2} = (2\pi)^{n/2} e^{-|k|^2/2}.\end{aligned}$$

Als Resultat bekommt man also

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{n/2} e^{-|k|^2/2}.$$

Mit (ii) folgt auch für  $\lambda > 0$

$$\left( e^{-\lambda|x|^2/2} \right)^\wedge = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} e^{-|k|^2/2\lambda}.$$

Sei nun  $A = A^T$  eine symmetrische, positive  $n \times n$  Matrix,  $f(x) = e^{-\frac{1}{2}(Ax, x)}$ , wobei  $(Ax, x) = Ax \cdot x = \sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j$ . Dann ist  $f \in L^1$  und

$$\hat{f}(k) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(\det A)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}k, k)}.$$

*Beweis.* Es gibt eine orthogonale Matrix  $R$  so dass

$$R^T A R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \Lambda.$$

Mit der Substitution  $x = Ry$  bekommt man dann

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(Ax, x) - i(k, x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(ARy, Ry) - i(k, Ry)} \underbrace{\det R}_{=1} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(\Lambda y, y) - i(R^T k, y)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 - i \sum_{j=1}^n (R^T k)_j y_j} dy \\ &= \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \lambda_j y_j^2 - i(R^T k)_j y_j} dy_j = \prod_{j=1}^n \left( \frac{2\pi}{\lambda_j} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} (R^T k)_j^2 \lambda_j^{-1}} \\ &= \frac{(2\pi)^{n/2}}{(\prod_{j=1}^n \lambda_j)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (\Lambda^{-1} R^T k, R^T k)} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(\det A)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (A^{-1} k, k)},\end{aligned}$$

denn  $RA^{-1}R^T = R(R^T A R)^{-1}R^T = A^{-1}$ . □

### 3. Weitere Beispiele ( $n = 1$ )

**BEISPIEL 3.1.** Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion für das Intervall  $[-1, 1]$

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{[-1,1]}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(x) e^{-ikx} dx = \int_{-1}^1 e^{-ikx} dx = \frac{1}{-ik} e^{-ikx} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2 \sin k}{k}.\end{aligned}$$

Diese Funktion ist nicht in  $L^1$ . Sie ist die Einschränkung auf  $\mathbb{R}$  einer ganzen holomorphen Funktion von  $k \in \mathbb{C}$ .

BEISPIEL 3.2. Fouriertransformierte von  $e^{-m|x|}$

$$\begin{aligned} \left( e^{-m|x|} \right)^\wedge &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m|x|-ikx} dx = \int_0^{\infty} e^{-m x - ikx} dx + \int_{-\infty}^0 e^{m x - ikx} dx \\ &= \frac{1}{m + ik} + \frac{1}{m - ik} = \frac{2m}{m^2 + k^2} \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Diese Funktion hat eine holomorphe Fortsetzung für  $k$  komplex mit  $\text{Im } k| < m$ . Wir werden sehen (Abschn. 7), dass es eine Beziehung zwischen Abfall-Eigenschaften einer Funktion und der holomorphen Eigenschaften ihrer Fouriertransformierten.

BEISPIEL 3.3. Sei  $h_0(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ . Wir haben gesehen, dass  $\hat{h}_0(k) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} h_0(k)$ , d.h.  $h_0$  ist ein Eigenvektor des linearen Operators  $F : f \mapsto \hat{f}$ . Definiere  $h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} (d/dx)^n e^{-x^2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (Hermite-Funktionen). Die Funktion  $h_n$  ist das Produkt eines Polynoms vom Grade  $n$  mit  $h_0$ :

$$h_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad H_0 = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \dots$$

Diese Polynome heissen Hermite-Polynome (S. auch Abschn. 4 im Kapitel 3). Wir behaupten, dass Hermite-Funktionen Eigenvektoren für die Fouriertransformation sind:

$$\hat{h}_n(k) = (-i)^n (2\pi)^{1/2} h_n(k).$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \hat{h}_m(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{\frac{1}{2}x^2} \left( \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} \right) e^{-ikx} dx \stackrel{\text{p.I.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{\frac{1}{2}x^2 - ikx} dx \\ &= e^{\frac{1}{2}k^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{\frac{1}{2}(x-ik)^2} dx = i^m e^{\frac{1}{2}k^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^m}{dk^m} e^{\frac{1}{2}(x-ik)^2} dx \\ &= i^m e^{\frac{1}{2}k^2} \frac{d^m}{dk^m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + \frac{1}{2}x^2 - ikx - \frac{1}{2}k^2} dx = i^m e^{\frac{1}{2}k^2} \sqrt{2\pi} \frac{d^m}{dk^m} e^{-\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k^2} \\ &= i^m \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}k^2} \frac{d^m}{dk^m} e^{-k^2} = (-i)^m \sqrt{2\pi} h_m(k). \quad \square \end{aligned}$$

#### 4. Umkehrsatz für $L^1$ -Funktionen

Wir benützen folgende Notationen:

$$\begin{aligned} B_R &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq R\}, \quad R > 0, \\ C_0(\mathbb{R}^n) &= \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig, } \{x \mid f(x) \neq 0\} \text{ beschränkt}\} \end{aligned}$$

Wir wissen, dass  $C_0(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  liegt, d.h.  $\forall f \in L^1, \epsilon > 0 \exists g \in C_0(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|f - g\|_1 < \epsilon$ .

SATZ 4.1.

- (i)  $f, \hat{f} \in L^1 \Rightarrow f^{\wedge\vee} = f$
- (ii)  $f, \check{f} \in L^1 \Rightarrow f^{\vee\wedge} = f$

BEMERKUNG 4.1. Die Gleichheit gilt in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Also bedeutet z.B. (i)

$$(2) \quad f, \hat{f} \in L^1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk,$$

für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Für stetige Funktionen  $f$  kann man mehr sagen. Die Funktion  $f^{\wedge\vee}$  ist stetig nach Lemma 1.1. Ist also  $f$  stetig, so ist  $g = f - f^{\wedge\vee} = 0$  f.ü. und stetig. Wir wollen zeigen, dass  $g$  identisch verschwindet. Ist  $g$  in einem Punkt nicht Null, so auch in einer kleinen Kugel um diesen Punkt. Da jede Kugel positives Mass hat, ist das ein Widerspruch. Es folgt, dass für stetige Funktionen  $f$ , (2) für alle  $x$  gilt.

BEMERKUNG 4.2. Aus Beispiel 3 (b) folgt die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^2 + k^2} e^{ikx} dk = \frac{\pi}{m} e^{-m|x|}.$$

BEMERKUNG 4.3. Den Faktor  $(2\pi)^n$  kann man auf  $\wedge, \vee$  verteilen. Oft findet man die Konvention

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \dots, \quad \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \dots$$

*Beweis von Satz 4.1.* (i)[(ii) analog]. Die naive Rechnung (mit unberechtigter Vertauschung der Integrale) führt auf Schwierigkeiten:

$$f^{\wedge\vee}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-ik(x-y)}}_{\notin L^1} dk \right\} dy.$$

Trick: Wir führen einen konvergenzerzeugenden Faktor ein. Sei  $\delta > 0$ . Da

$$|\hat{f}(k)e^{-\delta|k|^2/2}| \leq |\hat{f}(k)|,$$

gilt nach dem Lebesgueschen Satz der dominierten Konvergenz:

$$\begin{aligned} f^{\wedge\vee}(x) &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{-\delta|k|^2/2 + ik \cdot x} dk \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\delta|k|^2/2 + ik \cdot (x-y)} dy dk \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \Phi_{\delta}(x-y) dy, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta}(t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta|k|^2/2 + ik \cdot t} dk = \frac{1}{(2\pi)^n} \delta^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|k|^2/2 + ik \cdot t\delta^{-1/2}} dk \\ &= \delta^{-n/2} \Phi_1(t/\sqrt{\delta}) = (2\pi\delta)^{-n/2} e^{-t^2/2\delta}. \end{aligned}$$

Also:

$$f^{\wedge\vee}(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \sqrt{\delta}t) \Phi_1(t) dt.$$

Sei zuerst  $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist  $f$  beschränkt und  $|f(x - \sqrt{\delta}t)| \Phi_1(t) \leq \text{const} \Phi_1(t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Also mit dem Lebesgueschen Konvergenzsatz

$$f^{\wedge\vee}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\delta \downarrow 0} f(x - \sqrt{\delta}t) \Phi_1(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \Phi_1(t) dt = f(x).$$

Der Satz ist für  $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$  mit  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  bewiesen.

Sei jetzt  $f$  beliebig in  $L^1$ . Notation:  $f_y(x) = f(x-y)$ ,  $\varphi_{\delta}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \sqrt{\delta}t) \Phi_1(t) dt$ . Wir müssen zeigen, dass für fast alle  $x$ ,  $\varphi_{\delta}(x)$  gegen  $f(x)$  konvergiert. Wir schätzen zuerst die  $L^1$  Norm  $\|\varphi_{\delta} - f\|_1$  ab. Sei  $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$  so, dass  $\|g - f\|_1 < \epsilon/3$ , und sei  $R$  so dass  $g(x) = 0$  für  $|x| > R$ . Dann ist auch  $\|g_y - f_y\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x -$

$y) - f(x - y)|dx = \|g - f\|_1 < \epsilon/3$  und

$$\begin{aligned} \|\varphi_\delta - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f_{\sqrt{\delta t}}(x) - f(x)) \Phi_1(t) dt \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f_{\sqrt{\delta t}}(x) - f(x)| \Phi_1(t) dt dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \|f_{\sqrt{\delta t}} - f\|_1 \Phi_1(t) dt, \\ \|f_{\sqrt{\delta t}} - f\|_1 &\leq \|f_{\sqrt{\delta t}} - g_{\sqrt{\delta t}}\|_1 + \|g_{\sqrt{\delta t}} - g\|_1 + \|g - f\|_1, \\ \|g_{\sqrt{\delta t}} - g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |g_{\sqrt{\delta t}}(x) - g(x)| dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Der Satz von Lebesgue ist anwendbar, denn  $|g_{\sqrt{\delta t}}(x) - g(x)| \leq 2 \max_y |g(y)| \cdot \chi_{B_{R+\sqrt{t}}}(x) \in L^1$ , für  $\delta < 1$ . Also, für  $\delta > 0$  klein genug

$$\|\varphi_\delta - f\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\epsilon}{3} \Phi_1(t) dt + \int_{\mathbb{R}^n} \|g_{\sqrt{\delta t}} - g\|_1 \Phi_1(t) dt + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\epsilon}{3} \Phi_1(t) dt < \epsilon.$$

Für den mittleren Term benutzen wir wieder den Satz von Lebesgue, deren Voraussetzung wegen  $\|g_{\sqrt{\delta t}} - g\|_1 \Phi_1(t) \leq 2\|g\|_1 \Phi_1(t) \in L^1$  erfüllt ist.

Wir haben gezeigt, dass

$$\varphi_\delta \rightarrow f \text{ in } L^1. \quad (1)$$

Andererseits wissen wir, dass

$$\varphi_\delta(x) \rightarrow f^{\wedge\vee}(x). \quad (2)$$

Die nächste Idee ist, die Konvergenz in  $L^1$  auch für (2) zu zeigen, da daraus die Behauptung des Umkehrsatzes aus der Eindeutigkeit der Grenzwerte folgt. Diese Konvergenz zeigen wir nach Multiplikation mit der charakteristischen Funktion einer beliebig grossen Kugel  $B_R$ .

Die Funktionen  $\varphi_\delta, f^{\wedge\vee}$  sind beschränkt, gleichmässig in  $\delta$ .

$$|\varphi_\delta(x)| = |(\hat{f}(k)e^{-\delta|k|^2/2})^\vee(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)| e^{-\delta|k|^2/2} dk \leq \|\hat{f}\|_1 < \infty,$$

$$|f^{\wedge\vee}(x)| \leq \|\hat{f}\|_1 < \infty,$$

also ist  $\forall R > 0$

$$|\varphi_\delta(x)\chi_{B_R}(x) - f^{\wedge\vee}(x)\chi_{B_R}(x)| \leq 2\|\hat{f}\|_1 \chi_{B_R}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

und aus (2), mit Lebesgue,

$$\|\varphi_\delta \chi_{B_R} - f^{\wedge\vee} \chi_{B_R}\|_1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Wegen (1) ist aber

$$\|\varphi_\delta \chi_{B_R} - f \chi_{B_R}\|_1 \leq \|\varphi_\delta - f\|_1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Nach der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt  $f \chi_{B_R} = f^{\wedge\vee} \chi_{B_R}$  in  $L^1$ , d.h.  $f(x) = f^{\wedge\vee}(x)$  f.ü. auf  $B_R$ . Da  $R$  beliebig ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**KOROLLAR 4.2.**

(i)  $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$  (f.ü.)

(ii)  $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \check{f} = 0 \Rightarrow f = 0$  (f.ü.)

d.h.  $\wedge : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$  ist injektiv, ebenso  $\vee$ .

**KOROLLAR 4.3.**  $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f^{\wedge\wedge}(x) = (2\pi)^n f(-x)$  (f.ü.)

*Beweis.*  $f^{\wedge\wedge}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk = (2\pi)^n f^{\wedge\vee}(-x) = (2\pi)^n f(-x)$ .  $\square$

KOROLLAR 4.4.  $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \check{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

*Beweis.* Setze  $\check{f}(x) := f(-x)$ .  $f, \hat{f} \in L^1 \Rightarrow f^{\wedge\wedge} = (2\pi)^n \check{f} \in L^1 \Rightarrow f^{\wedge\wedge\wedge} \in L^1$ , usw. Also  $(2\pi)^{2n} \check{f}(x) = f^{\wedge\wedge\wedge}(x) \in L^1$ .

SATZ 4.5.  $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und es gilt

$$\|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2} \|\hat{f}\|_2. \quad (\text{Plancherel-Formel})$$

*Beweis.*

a)  $\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)|^2 dk \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_1 |\hat{f}(k)| dk \leq \|f\|_1 \|\hat{f}\|_1 < \infty$ .

b)  $\|f\|_2^2 = \|f^{\vee\vee}\|_2^2 \leq \|\check{f}\|_1 \|f\|_1 < \infty$ .

c)  $\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{f(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n} f^{\wedge\wedge}(-x) \overline{f(x)} dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(-x) \check{f}(x) dx$   
 $= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \check{f}(-x) dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \overline{f(x)} dx. \quad \square$

## 5. Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

DEFINITION 5.1. Ein *Multiindex* ist ein Element  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , ( $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ).

Wir benützen folgende Notationen für ein Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ :

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Für  $X \subset \mathbb{R}^n$  setze  $C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$ . Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen definiere

$$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \partial^\alpha f \in C(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k\},$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Mit diesen Notationen heisst z.B. der Taylorsche Satz für  $f \in C^k(\Omega)$ ,  $x \in \Omega$

$$f(x+t) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq k}} \partial^\alpha f(x) \frac{t^\alpha}{\alpha!} + o(|t|^k) \quad (t \rightarrow 0).$$

DEFINITION 5.2. Für  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , definieren wir die Grössen  $\|\varphi\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$ . Der *Schwartzraum* ist der komplexe Vektorraum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \|\varphi\|_{\alpha, \beta} < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Die Grössen  $\|\varphi\|_{\alpha, \beta}$  sind keine Normen<sup>1</sup> (es gilt z.B.  $\|1\|_{\alpha, \beta} = 0$  falls  $\beta \neq 0$ ). Man hat aber das Resultat:

LEMMA 5.1.  $\forall k, l \in \mathbb{N}$  ist

$$\|\varphi\|_{k, l} = \max_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq l}} \|\varphi\|_{\alpha, \beta}$$

eine Norm auf dem Vektorraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

BEISPIELE:

(i)  $e^{-a|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \forall a > 0$ , denn

$$x^\alpha \partial^\beta e^{-a|x|^2} = P(x) e^{-a|x|^2},$$

$P$  ein Polynom in  $x_1, \dots, x_n$ .

(ii)  $e^{-a|x|}, (1 + |x|^2)^{-s} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

<sup>1</sup>Hier ist gemeint: keine Normen auf (ihrem Definitionsbereich in)  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Die  $\|\varphi\|_{\alpha, \beta}$  sind allerdings Normen auf dem Schwartzraum (Übung).

BEMERKUNG 5.1. Sei  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist auch  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, x^\alpha \partial^\beta \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Ebenso  $P(x)Q(\partial)\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , für alle Polynome  $P, Q$ .

LEMMA 5.2. Seien  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \beta \in \mathbb{N}^n, k \in \mathbb{N}$ . Dann existiert eine Konstante  $c_{\beta,k} = c_{\beta,k}(\varphi)$  so dass

$$|\partial^\beta \varphi(x)| \leq \frac{c_{\beta,k}}{(1+|x|^2)^k}.$$

*Beweis.* Für alle Polynome  $P$  ist  $P(x)\partial^\beta \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , d.h.  $|P(x)\partial^\beta \varphi(x)| \leq \text{const.}$  Für  $P(x) = (1+x_1^2+\dots+x_n^2)^k$ , erhält man die gewünschte Ungleichung.  $\square$

KOROLLAR 5.3.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n), \forall p \in [1, \infty[$ .

*Beweis.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_{0,k}^p}{(1+|x|^2)^{kp}} dx < \infty$$

falls z.B.  $k = [n/2] + 1$ .  $\square$

DEFINITION 5.3. Eine Folge  $\varphi_j$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  konvergiert gegen  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  falls

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{k,l} = 0 \quad \text{für alle } k, l \in \mathbb{N}.$$

Man schreibt dann

$$\varphi = \mathcal{S}\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j \quad \text{oder} \quad \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \quad (j \rightarrow \infty).$$

Eine äquivalente Bedingung ist  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{\alpha,\beta} = 0$  für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ .

DEFINITION 5.4. Eine lineare Abbildung  $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist stetig, falls für alle konvergenten Folgen gilt

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow F(\varphi_j) \xrightarrow{\mathcal{S}} F(\varphi).$$

Wir werden zeigen, dass  $\wedge : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  stetig und bijektiv ist.

LEMMA 5.4. Sei  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt:

- (i)  $(\partial_j \varphi)^\wedge(k) = ik_j \hat{\varphi}(k)$
- (ii)  $\partial_j \hat{\varphi}(k) = \frac{\partial}{\partial k_j} \hat{\varphi}(k) = (-ix_j \varphi)^\wedge(k)$
- (iii)  $(\partial_j \varphi)^\vee(k) = -ik_j \check{\varphi}(k)$
- (iv)  $\partial_j \check{\varphi}(k) = (ix_j \varphi)^\vee(k)$

*Beweis.* (i) Man hat

$$\begin{aligned} (\partial_j \varphi)^\wedge(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) e^{-ik \cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) \right) e^{-ik \cdot x} dx_j \right\} dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n, \\ \left\{ \dots \right\} &= \varphi(x) e^{-ik \cdot x} \Big|_{x_j=-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ik \cdot x} dx_j. \end{aligned}$$

Da  $\varphi$  eine Funktion im Schwartzraum ist, verschwinden die Randterme im Unendlichen. Durch Einsetzen erhalten wir:

$$(\partial_j \varphi)^\wedge(k) = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ik \cdot x} dx = ik_j \hat{\varphi}(k).$$

(ii)

$$\frac{\partial}{\partial k_j} \hat{\varphi}(k) = \frac{\partial}{\partial k_j} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ik \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} (-ix_j) \varphi(x) e^{-ik \cdot x} dx = (-ix_j \varphi)^\wedge(k).$$

Die Vertauschung von Ableitung und Integral ist erlaubt nach Satz 2.1: der Integrand ist eine integrierbare Funktion von  $x \in \mathbb{R}^n$ , seine partielle Ableitung nach

$k_j$  ist definiert und im Betrag durch die integrierbare,  $k$ -unabhängige Funktion  $|x_j \varphi(x)|$  abgeschätzt.  
(iii),(iv) analog.  $\square$

LEMMA 5.5.  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\varphi}, \check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} k^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(k) &= k^\alpha [(-ix)^\beta \varphi]^\wedge = [(-i\partial)^\alpha (-ix)^\beta \varphi]^\wedge(k), \\ |k^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(k)| &= |(\partial^\alpha x^\beta \varphi)^\wedge(k)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|\partial^\alpha (x^\beta \varphi)(x)|}_{\in \mathcal{S} \subset L^1} dx, \end{aligned}$$

$\sup_k |k^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(k)| < \infty \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  also  $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Analog  $\check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

SATZ 5.6. *Die lineare Abbildung*

$$F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \mapsto \hat{\varphi},$$

*ist bijektiv und stetig. Ihre Inverse*

$$F^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \mapsto \check{\varphi},$$

*ist ebenfalls stetig.*

*Beweis.* Bijektivität folgt aus dem Umkehrsatz und Lemma 5.5.

(a) Stetigkeit in 0. Sei  $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi}_j\|_{k,l} &= \max_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq l}} \sup_{k \in \mathbb{R}^n} |k^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}_j(k)| \leq \max_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq l}} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha x^\beta \varphi_j(x)| dx \\ &= \max_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq l}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|x|^2)^m}{(1+|x|^2)^m} |\partial^\alpha x^\beta \varphi_j(x)| dx \\ &\leq \max_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq l}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^m |\partial^\alpha x^\beta \varphi_j(x)| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^m} dy \\ &\stackrel{m > n/2}{\leq} \text{const} \max_{\substack{|\alpha'| \leq k \\ |\beta'| \leq l+2m}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\beta'} \partial^{\alpha'} \varphi_j(x)| \\ &\leq \text{const} \|\varphi_j\|_{l+2m,k} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

(b) Stetigkeit:  $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \iff \varphi_j - \varphi \equiv \psi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \Rightarrow \hat{\psi}_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \Rightarrow \hat{\varphi}_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\varphi}$ .  $\square$

BEMERKUNG 5.2. In unendlichen Dimensionen betrachtet man Vektorräume praktisch immer mit einer kompatiblen Topologie, das heisst, einer Topologie bezüglich derer die Vektoraddition und Skalarmultiplikation stetig sind. Die meisten solcher topologischen Vektorräume fallen in eine der folgenden Klassen.

- Skalarprodukträume, das heisst Vektorräume  $V$  mit einem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$ . Sind diese zusätzlich vollständig, so nennt man sie *Hilberträume* (s. später).
- Normierte Vektorräume, das heisst Vektorräume  $V$  mit einer Norm  $\|\cdot\|$ . Sind diese zusätzlich vollständig, so nennt man sie Banachräume. Normierte Vektorräume sind immer metrische Räume mit der Metrik  $d(u, v) := \|u - v\|$ . Es gelten also die in der Analysis II gezeigten Eigenschaften von metrischen Räumen, z.B. die Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit. Skalarprodukträume sind Spezialfälle von normierten Vektorräumen mit Norm  $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$ .



- Lokalkonvexe Vektorräume sind Vektorräume mit einer Familie von Halbnormen  $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha \in J}$ . Diese erzeugen eine Topologie, so dass eine Umgebungsbasis von  $v \in V$  durch die Mengen

$$U_{I,\epsilon}(v) = \{x \in V \mid \|x - v\|_\alpha \leq \epsilon \forall \alpha \in I\}$$

gegeben ist, wobei  $I \subset J$  eine endliche Untermenge ist und  $\epsilon > 0$ . Eine Folge  $(v_n)$  in  $V$  konvergiert gegen  $v \in V$  genau dann wenn für jedes  $\alpha \in J$  gilt, dass  $\|v_n - v\|_\alpha \rightarrow 0$ . Wir werden zusätzlich annehmen, dass in allen betrachteten lokalkonvexen Räumen gilt  $\|v\|_\alpha = 0 \forall \alpha \in J \Rightarrow v = 0$ .

Ist die Indexmenge  $J$  höchstens abzählbar, sagen wir  $J = \mathbb{N}$ , so ist der lokalkonvexe Raum metrisierbar, mit Metrik

$$d(u, v) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|u - v\|_k}{1 + \|u - v\|_k}.$$

Der Schwartzraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  mit der abzählbaren Familie von Halbnormen  $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$  fällt in diese Kategorie. Für ihn gelten also insbesondere alle aus der Analysis II bekannten Eigenschaften von metrischen Räumen. Allgemeine lokalkonvexe Räume sind dagegen nicht metrisierbar, und im allgemeinen ist z.B. Folgenstetigkeit nicht äquivalent zu Stetigkeit.

Ist ein lokalkonvexer Raum zusätzlich vollständig, so nennt man ihn Fréchetraum. Der Schwartzraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist beispielsweise ein Fréchetraum (s. Übung).

## 6. Fouriertransformation von rotationsinvarianten Funktionen

Eine rotationsinvariante Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$g(Rx) = g(x) \quad \forall R \text{ orthogonal } (R^T R = 1).$$

LEMMA 6.1. *Eine Funktion  $g$  ist genau dann rotationsinvariant wenn sie die Form*

$$g(x) = f(|x|), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

hat.

*Beweis.* Ist  $g$  von dieser Form dann ist  $g$  rotationsinvariant, denn  $|Rx| = |x|$ . Umgekehrt sei  $g$  rotationsinvariant,  $f(r) := g(r, 0, \dots, 0)$ . Da  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  eine orthogonale Matrix  $R$  existiert mit  $Rx = (|x|, 0, \dots, 0)$ , folgt  $g(x) = g(|x|, 0, \dots, 0) = f(|x|)$ .  $\square$

Wir führen neue Koordinaten auf  $\mathbb{R}^n$  ein. Jedes  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$  kann eindeutig als  $x = ry$  geschrieben werden, wobei  $r > 0$  und  $|y| = 1$ . Die  $n-1$  dimensionale Sphäre  $|y| = 1$  besteht aus den zwei Halbsphären  $y_1 \geq 0$ ,  $y_1 \leq 0$ . Diese parametrisieren wir durch die Koordinaten  $y_2, \dots, y_n$ . Es ergibt sich die Parametrisierung von  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$  bzw.  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$ , je nach Vorzeichen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm r \sqrt{1 - y_2^2 - \dots - y_n^2} \\ x_2 &= r y_2 \\ &\vdots \\ x_n &= r y_n, \quad r \in (0, \infty), \quad \sum_{i=2}^n y_i^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Die Jacobische Determinante ist dann ( $a = \sqrt{1 - y_2^2 - \dots - y_n^2}$ )

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, y_2, \dots, y_n)} &= \det \begin{pmatrix} \pm a & \mp r y_2/a & \mp r y_3/a & \dots & \mp r y_n/a \\ y_2 & r & 0 & \dots & 0 \\ y_3 & 0 & r & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ y_n & 0 & \dots & 0 & r \end{pmatrix} \\ &= ar^{n-1} + \frac{y_2^2}{a} r^{n-1} + \frac{y_3^2}{a} r^{n-1} + \dots + \frac{y_n^2}{a} r^{n-1} \\ &= \frac{1}{a} r^{n-1} (a^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) = \frac{1}{a} r^{n-1}, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$dx_1 \cdots dx_n = r^{n-1} dr \frac{1}{\sqrt{1 - y_2^2 - \dots - y_n^2}} dy_2 \cdots dy_n \equiv r^{n-1} dr d\Omega(y),$$

wobei  $d\Omega(y)$  = Integrationsmass auf der Einheitssphäre.

LEMMA 6.2. Die "Oberfläche" der  $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre  $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| = 1\}$  ist gegeben durch

$$|S^{n-1}| = \int_{S^{n-1}} d\Omega(y) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = \begin{cases} \frac{2\pi^k}{(k-1)!}, & n = 2k \text{ gerade,} \\ \frac{2^{2k+1} \pi^k k!}{(2k)!}, & n = 2k + 1 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die hier vorkommende Euler Gamma Funktion ist bekanntlich für  $\text{Re}(s) > 0$  als  $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$  definiert, und hat vermöge der Funktionalgleichung  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  eine meromorphe Fortsetzung auf  $\mathbb{C}$ , mit einfachen Polen in den nicht positiven ganzen Zahlen. Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\Gamma(n+1) = n!$ , und  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \pi^{n/2} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr \int_{S^{n-1}} d\Omega(y) \\ &\stackrel{s=r^2}{=} |S^{n-1}| \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1} ds = |S^{n-1}| \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

Die zweite Formel folgt aus der Funktionalgleichung und  $\Gamma(1) = 1$   $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .  $\square$

BEISPIELE:  $|S^1| = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi$ ,  $|S^2| = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = 4\pi$ ,  $|S^3| = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2$ .

Sei  $g \in L^1$  rotationsinvariant. Dann ist  $\hat{g}$  ebenfalls rotationsinvariant, denn für jede orthogonale Matrix  $R$ ,

$$\hat{g}(Rk) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-iRk \cdot x} dx \stackrel{x \rightarrow Rx}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-iRk \cdot Rx} dx = \hat{g}(k).$$

Fourierintegrale von rotationsinvarianten Funktionen können auf eindimensionale Integrale zurückgeführt werden. Sei  $g(x) = g(|x|)$  rotationsinvariant und integrierbar auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  (zur Erleichterung der Notation soll hier nicht zwischen  $g$  und  $f$  unterschieden werden). In den Koordinaten  $r, y$  hat man

$$(3) \quad \hat{g}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} g(|x|) e^{-ik \cdot x} dx = \int_0^\infty g(r) \left[ \int_{S^{n-1}} e^{-ik \cdot yr} d\Omega(y) \right] r^{n-1} dr.$$

Da  $\hat{g}(k) = \hat{g}(|k|, 0, \dots, 0)$ , folgt die Formel

$$\begin{aligned}\hat{g}(k) &= \int_0^\infty g(r) G_n(|k|r) r^{n-1} dr, \\ G_n(\rho) &= \int_{S^{n-1}} e^{-i\rho y_1} d\Omega(y).\end{aligned}$$

Die Funktion  $G_n$  hängt nur noch von der Dimension  $n$  ab. Wir wollen sie näher untersuchen.

LEMMA 6.3.

- (i)  $G_n$  ist die Einschränkung auf  $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$  einer ganzen holomorphen Funktion.
- (ii) Für alle  $k \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\int_{S^{n-1}} e^{-ik \cdot y} d\Omega(y) = G_n(|k|)$$

*Beweis.* (i) Die Definition von  $G_n(\rho)$  macht für beliebige  $\rho \in \mathbb{C}$  einen Sinn. Um zu zeigen, dass die komplexe Ableitung existiert, benützen wir den Satz von Lebesgue: Sei  $u_j$  eine beliebige Nullfolge in  $\mathbb{C}$  und  $\rho \in \mathbb{C}$  beliebig. Dann ist  $u_j^{-1}[G_n(\rho + u_j) - G_n(\rho)] = \int_{S^{n-1}} e^{-i\rho y_1} u_j^{-1}(e^{-i\rho u_j} - 1) d\Omega(y)$ . Der Integrand ist beschränkt, gleichmässig in  $j$ , und der Limes  $j \rightarrow \infty$  kann unter dem Integral ausgeführt werden, die komplexe Ableitung existiert und die Funktion ist holomorph.

(ii) Wähle  $g(x) = g_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon} \chi_{[1-\epsilon, 1+\epsilon]}(|x|)$ . Dann konvergiert  $\hat{g}_\epsilon(k)$  in (3) gegen  $\int_{S^{n-1}} \exp(-ik \cdot y) d\Omega(y)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ . Da  $\hat{g}_\epsilon$  für alle  $\epsilon > 0$  rotationsinvariant ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Wir wollen noch einen zweiten, etwas eleganteren Beweis der ersten Aussage besprechen, unter Benutzung des folgenden Satzes aus der komplexen Analysis.

SATZ 6.4 (Satz von Morera). Sei  $D \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Gilt

$$\oint_\gamma f(z) dz = 0$$

für jede geschlossene stückweise  $C^1$  Kurve  $\gamma \subset \mathbb{C}$ , dann ist  $f$  holomorph.

Daraus folgt direkt:

KOROLLAR 6.5. Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Sei  $F : D \times K \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Ist in jedem  $y \in K$  die Funktion  $z \mapsto F(z, y)$  holomorph, so ist auch die Funktion

$$\begin{aligned}f : D &\rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto f(z) &:= \int_K F(z, y) dy\end{aligned}$$

holomorph.

*Beweis.* Nach dem Satz von Morera müssen wir zeigen, dass  $f$  stetig ist und dass  $\oint_\gamma f(z) dz = 0$  für alle Kurven  $\gamma \subset D$  wie im Satz.

Stetigkeit: Sei  $z \in D$  und betrachte eine kompakte Umgebung  $U \subset D$  von  $z$ . Dann ist  $F$  als stetige Funktion auf dem Kompaktum  $U \times K$  beschränkt. Also kann man (mit konstanter Majorante) den Satz von Lebesgue (DCT) anwenden und erhält

$$\lim_{w \rightarrow z} f(w) = \lim_{w \rightarrow z} \int_K F(w, y) dy \stackrel{DCT}{=} \int_K \lim_{w \rightarrow z} F(w, y) dy = \int_K F(z, y) dy = f(z),$$

also die Stetigkeit von  $f$  in  $z$ .

Holomorphie: Es gilt mit Fubini

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \int_K F(z, y) dy dz = \int_K \oint_{\gamma} F(z, y) dz dy = 0.$$

Wir integrieren eine stetige Funktion über ein Kompaktum, also ist Fubini anwendbar. Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass  $F(z, y)$  holomorph in  $z$  ist, also nach dem Satz von Cauchy das Kurvenintegral verschwindet.  $\square$

Das Korollar gilt auch für den Fall, dass die kompakte Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  durch eine kompakte Mannigfaltigkeit ersetzt wird, da man letztere mit endlich vielen kompakten Kartengebieten überdecken kann. Insbesondere folgt aus dem Korollar direkt, dass die Funktion  $G_n(z)$  holomorph ist, und damit ein Beweis von Teil (i) von Lemma 6.3.

In der Praxis kann man auch oft die kompakte Menge  $K$  im Korollar durch eine nicht kompakte ersetzen, man muss nur prüfen, dass die Voraussetzungen vom Satz von Lebesgue in einer Umgebung von jedem  $z \in D$  und die des Satzes von Fubini auf  $\gamma \times K$  erfüllt sind. Man muss also insbesondere keine Abschätzung für die Ableitung von  $F$  treffen.

Wir kehren nun zurück zur Diskussion der Funktionen  $G_n$ .

DEFINITION 6.1. Sei  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ . Die *Besselfunktion* (erster Gattung) der Ordnung  $\alpha$  ist die durch die konvergente Potenzreihe

$$J_{\alpha}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2j}$$

definierte Funktion der komplexen Variable  $z$ .

Übung. Zeigen Sie, dass  $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z)$ .

SATZ 6.6. Sei  $n \geq 2$ . Dann gilt

- (i)  $G_n(\rho) = (2\pi)^{n/2} \rho^{1-n/2} J_{n/2-1}(\rho)$ .
- (ii) Für integrierbare rotationsinvariante Funktionen  $g$  gilt

$$\hat{g}(k) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |k|^{1-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} g(r) J_{\frac{n}{2}-1}(|k|r) r^{\frac{n}{2}} dr.$$

In drei Dimensionen gilt also insbesondere

$$\hat{g}(k) = \frac{4\pi}{|k|} \int_0^{\infty} g(r) r \sin(|k|r) dr$$

Beweis von Satz 6.6. Es muss nur noch (i) bewiesen werden. Sei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial k_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial k_n^2}$$

der Laplace-Operator.  $G_n(|k|)$  erfüllt die partielle Differenzialgleichung

$$\Delta G_n(|k|) = \int_{|y|=1} (-y_1^2 - \dots - y_n^2) e^{-ik \cdot y} d\Omega(y) = -G_n(|k|)$$

Wir werden die Formel für  $G_n$  durch lösen dieser Gleichung finden.

$$\begin{aligned}\partial_i |k| &= \partial_i \sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2} = \frac{k_i}{|k|}, \\ \Delta G_n &= \sum_{i=1}^n \partial_i \partial_i G_n = \sum_{i=1}^n \partial_i \left( \frac{k_i}{\rho} \frac{dG_n}{d\rho} \right) \\ &= \frac{n}{\rho} \frac{dG_n}{d\rho} - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\rho^2} \frac{k_i}{\rho} \frac{dG_n}{d\rho} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\rho} \frac{k_i}{\rho} \frac{d^2 G_n}{d\rho^2} \\ &= \frac{d^2 G_n}{d\rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{dG_n}{d\rho}.\end{aligned}$$

Zu lösen ist also die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 G_n}{d\rho^2}(\rho) + \frac{n-1}{\rho} \frac{dG_n}{d\rho}(\rho) + G_n(\rho) = 0,$$

welche zwei linear unabhängige Lösungen in  $(0, \infty)$  besitzt. Nach Lemma 6.3 suchen wir eine holomorphe Lösung. Wir machen also den Ansatz

$$G_n(\rho) = \rho^\lambda \sum_{l=0}^{\infty} a_l \rho^l, \quad a_0 \neq 0.$$

Dann

$$\begin{aligned}G_n''(\rho) &= \sum_{l=0}^{\infty} (l+\lambda)(l+\lambda-1) a_l \rho^{l-2+\lambda}, \\ \frac{1}{\rho} G_n'(\rho) &= \sum_{l=0}^{\infty} (l+\lambda) a_l \rho^{l-2+\lambda}, \\ G_n(\rho) &= \sum_{l=2}^{\infty} a_{l-2} \rho^{l-2+\lambda}.\end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in die Differenzialgleichung, erhält man durch Koeffizientenvergleich folgende Beziehungen zwischen den Koeffizienten.

$$\begin{aligned}(l+\lambda)(l+\lambda-1+n-1)a_l + a_{l-2} &= 0, & l \geq 2 \\ (1+\lambda)(\lambda+n-1)a_1 &= 0, & l = 1 \\ \lambda(\lambda+n-2)a_0 &= 0, & l = 0.\end{aligned}$$

Aus  $a_0 \neq 0$  folgt dann entweder  $\lambda = 0$  oder, für  $n > 2$ ,  $\lambda = 2 - n$ . Die zweite Möglichkeit entspricht einem in 0 singulären Ansatz, und wird deshalb ausgeschlossen. Sei also  $\lambda = 0$ . Da  $n \geq 2$  folgt aus der zweiten Gleichung, dass  $a_1 = 0$ . Somit verschwinden nach der ersten Gleichung alle  $a_j$  mit ungeradem  $j$ . Die geraden Koeffizienten gewinnt man durch iteratives Lösen der Rekursionsrelation

$$\begin{aligned}a_{2l} &= -\frac{1}{2l(2l+n-2)} a_{2l-2} = -\frac{1}{4l(l+\frac{n}{2}-1)} a_{2(l-1)} \\ &= \frac{(-1)^l}{4^l l(l-1) \dots 2 \cdot 1 (l+\frac{n}{2}-1)(l+\frac{n}{2}-2) \dots (l+\frac{n}{2}-l)} a_0 \cdot \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2)} \\ &= \frac{(-1)^l}{2^{2l} l! \Gamma(l+\frac{n}{2})} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) a_0.\end{aligned}$$

Der Koeffizient  $a_0$  wird aus dem Wert von  $G_n$  im Ursprung bestimmt:

$$G_n(0) = \int_{S^{n-1}} d\Omega(y) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = a_0,$$

Es folgt, dass  $\Gamma(n/2)a_0 = 2\pi^{n/2}$  und somit

$$G_n(\rho) = 2\pi^{n/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (\rho/2)^{2l}}{l! \Gamma(l + \frac{n}{2})} = (2\pi)^{n/2} \frac{1}{\rho^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho). \quad \square$$

Die Differenzialgleichung für  $G_n$  kann als Differenzialgleichung für  $J_\alpha$  mit  $\alpha = n/2 - 1$  umgeschrieben werden. Man erhält die *Besselsche Differenzialgleichung*

$$J_\alpha''(x) + \frac{1}{x} J_\alpha'(x) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) J_\alpha(x) = 0.$$

In dieser Gleichung kommt nur  $\alpha^2$  vor, also ist mit  $J_\alpha$  auch  $J_{-\alpha}(x)$  ebenfalls eine Lösung. Die Lösungen  $J_\alpha$  und  $J_{-\alpha}$  sind linear unabhängig falls  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , wie aus dem Verhalten für  $x \rightarrow 0$  ersichtlich ist:  $J_{\pm\alpha}(x) = c_\alpha x^{\pm\alpha} (1 + O(x^2))$  mit  $c_\alpha \neq 0$ . Also ist  $C_1 J_\alpha(x) + C_2 J_{-\alpha}(x)$  die allgemeine Lösung der Besselschen Differenzialgleichung falls  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ . Wenn  $-n \in \mathbb{Z}_{<0}$  dann existiert der Grenzwert  $J_{-n}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow -n} J_\alpha(x)$ . Allerdings gilt  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$  also sind  $J_n, J_{-n}$  linear abhängig. Eine Basis des Lösungsraum für alle  $\alpha$  erhält man wenn man  $J_{-\alpha}$  durch die *Bessel-Funktion 2. Gattung* oder *Neumann-Funktion*

$$N_\alpha(x) = \frac{\cos(\pi\alpha) J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)}$$

ersetzt. Diese Funktionen sind für alle  $\alpha$  definiert, wobei  $N_n(x)$  für  $n \in \mathbb{Z}$  als Grenzwert  $\lim_{\alpha \rightarrow n} N_\alpha(x)$  zu verstehen ist. Die Funktionen  $J_\alpha(x), N_\alpha(x)$  bilden eine Basis des Lösungsraum für *alle*  $\alpha \in \mathbb{C}$  (S. Courant–Hilbert Kap. VII, Abschn. 9).

## 7. Regularität und Abfalleigenschaften

Die Regularität (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Analytizität, ...) einer Funktion entspricht den Abfalleigenschaften ihrer Fouriertransformierte. Diese Tatsache hat verschiedene mathematische Verkörperungen. Einige Resultate dieser Art sollen hier diskutiert werden.

**SATZ 7.1.** *Sei  $f \in C_0^s(\mathbb{R}^n) = \{\text{Funktionen mit kompaktem Träger, } s \text{ mal stetig differenzierbar}\}$ . Dann existiert eine Konstante  $c$  mit*

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{c}{(1 + |k|)^s}.$$

*Beweis.* Übung. □

**SATZ 7.2.** *(Riemann–Lebesgue)  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0$ .*

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(x - \frac{k\pi}{|k|^2}\right) e^{-ik \cdot x + i\pi} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f\left(x - \frac{k\pi}{|k|^2}\right) e^{-ik \cdot x} dx, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ f(x) - f\left(x - \frac{k\pi}{|k|^2}\right) \right] e^{-ik \cdot x} dx.$$

Sei vorerst  $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ . Es gibt dann ein  $R > 0$  so, dass  $f(x) = 0$  für  $|x| > R$ . Wir berechnen den Limes  $k \rightarrow \infty$  mit Hilfe des Lebesgueschen Konvergenzsatzes. Beachte dazu, dass für  $|x| > 2R$  und  $|k| > \pi/R$ ,  $|x - k\pi/|k|^2| > R$  und der Integrand verschwindet. Wir haben somit die Abschätzung  $|f(x) - f(x - k\pi/|k|^2)| \leq$

$2\chi_{2R}(x) \max |f| \in L^1$ , wobei  $\chi_{2R}$  die charakteristische Funktion der Kugel um 0 mit Radius  $2R$  ist. Man hat also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}(k) \stackrel{\text{Lebesgue}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( f(x) - f\left(x - \frac{k\pi}{|k|^2}\right) \right) dx = 0.$$

Für  $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$  ist die Behauptung also bewiesen worden. Sei nun  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann gibt es ein  $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|f - g\|_1 < \epsilon/2$ . Daraus folgt, für  $|k|$  genügend gross, mit Lemma 1.1,

$$|\hat{f}(k)| \leq |\hat{f}(k) - \hat{g}(k)| + |\hat{g}(k)| \leq \|f - g\|_1 + |\hat{g}(k)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \square$$

SATZ 7.3.

(i) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  messbar,  $C, m > 0$  so dass

$$|f(x)| \leq Ce^{-m|x|}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Dann hat  $\hat{f}$  eine holomorphe Fortsetzung auf dem Streifen  $\{|\operatorname{Im} k| < m\}$ . Ebenso  $\check{f}$ .

(ii) Sei  $m > 0$ ,  $f : \{z \mid |\operatorname{Im} z| < m\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und es gelte für alle  $|\eta| < m$

(A)  $f(\cdot + i\eta) \in L^1$ ,

(B)  $\max_{|\eta'| \leq |\eta|} |f(x + i\eta')| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ .

Dann existiert zu jedem  $m' < m$  eine Konstante  $C'$ , so dass

$$|\hat{f}(k)| \leq C' e^{-m'|k|}.$$

Dasselbe gilt für  $\check{f}$ .

*Beweis.* (i) Für  $|\eta| < m$  definiere

$$\hat{f}(k + i\eta) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(k+i\eta)x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} e^{\eta x} dx.$$

Da  $|f(x)e^{\eta x}| \leq Ce^{-m|x|+\eta|x|} \in L^1$  ist das Integral wohldefiniert. Die komplexe Ableitung existiert:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(z+h) - \hat{f}(z)}{h} \stackrel{\text{Lebesgue}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial}{\partial z} e^{-izx} dx.$$

Die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integral ergibt sich aus folgender Abschätzung: Sei  $h_j$  eine Nullfolge in  $\mathbb{C}$ . Wir dürfen annehmen, dass  $|h_j| < \delta$ , wobei  $\delta$  eine zu wählende positive Zahl ist. Mit der Ungleichung  $|e^y - 1| \leq |y|e^{|\operatorname{Re} y|}$ ,<sup>2</sup> erhalten wir für  $|\operatorname{Im} z| < m$ ,

$$\left| f(x) \frac{e^{-i(z+h_j)x} - e^{-izx}}{h_j} \right| \leq C|x|e^{(-m+|\operatorname{Im} z|+\delta)|x|} \in L^1(\mathbb{R}),$$

falls  $\delta$  klein genug ist.

(ii) Sei  $m' < 0$ ,  $k \leq 0$ . Da  $|\chi_{[-R,R]} f| \leq |f|$ , gilt, nach dem Satz von Lebesgue,

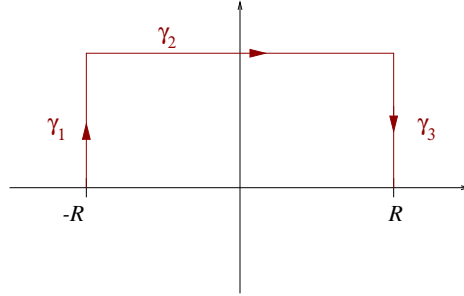
$$\hat{f}(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{-ikx} dx.$$

Nach dem Satz von Cauchy kann man den Integrationsweg in die komplexen Ebene deformieren:

$$\int_{-R}^R f(x) e^{-ikx} dx = \left( \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} \right) f(x) e^{-ikx} dx,$$

Die Integrationswege sind in Fig. 1 gezeichnet. Es gilt  $\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ , denn

<sup>2</sup> $|e^y - 1| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} e^{ty} dt \right| \leq \int_0^1 |y| \cdot |e^{ty}| dt \leq \int_0^1 |y| e^{t|\operatorname{Re} y|} dt \leq |y| e^{|\operatorname{Re} y|}.$

ABBILDUNG 1. Die Integrationswege  $\gamma_i$ 

$\max_{|\eta'| < m'} |f(\pm R + i\eta')|$  strebt gegen 0 für  $R \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(x) e^{-ikx} dx \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x + im') e^{-ik(x+im')} dx \right| \\ &= \left| [f(\cdot + im')]^{\wedge} e^{km'} \right| \\ &\leq \|f(\cdot + im')\|_1 e^{-|k|m'}. \end{aligned}$$

Für  $k \geq 0$  wird der Integrationsweg in die untere Halbebene deformiert und man erhält die Abschätzung

$$\hat{f}(k) \leq \|f(\cdot - im')\|_1 e^{-|k|m'}. \quad \square$$

Wir wollen jetzt zwei Anwendungen der Fouriertransformationen auf partiellen Differenzialgleichungen diskutieren. Im Allgemeinen ist die Fouriertransformation für partielle Differenzialgleichungen auf  $\mathbb{R}^n$  mit konstanten Koeffizienten nützlich, da Ableitungen zu Operatoren der Multiplikation mit einer Variablen werden. Wir benützen die Notation  $\partial_t$  für die partielle Ableitung  $\partial/\partial t$  nach  $t$ .

## 8. Wellengleichung

Die Wellengleichung ist

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0,$$

wobei  $u = u(x, t)$  eine Funktion von  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $t \in \mathbb{R}$  ist. Diese Gleichung erfüllen z.B. die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes im Vakuum. Das Anfangswertproblem (Cauchy-Problem) für die Wellengleichung ist: Gegeben  $f, g$  Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  (genügend regulär) finde  $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ , so dass

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ \partial_t u(x, 0) = g(x), \end{cases}$$

Um eine Formel für die Lösung dieses Anfangswertproblems zu finden, benutzen wir die Fouriertransformation in  $x$ .

$$\hat{u}(k, t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-ik \cdot x} dx.$$

Die Gleichung für  $\hat{u}$ , welche man aus der Wellengleichung bekommt (zunächst ohne Berücksichtigung der Konvergenz), ist

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \hat{u}(k, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x, t) e^{-ik \cdot x} dx \stackrel{\text{P.I.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \Delta e^{-ik \cdot x} dx = -k^2 \hat{u}(k, t).$$



Dabei wurde angenommen, dass  $u \rightarrow 0$  wenn  $x \rightarrow \infty$ . Die Lösung dieser (bei festem  $k$ ) gewöhnlichen Differenzialgleichung ist

$$\hat{u}(k, t) = A(k) \cos(|k|ct) + B(k) \sin(|k|ct).$$

Die Anfangsbedingungen für  $\hat{u}$  sind  $\hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k)$ ,  $\partial_t \hat{u}(k, 0) = \hat{g}(k)$ . Also

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) \cos(|k|ct) + \frac{\hat{g}(k)}{|k|c} \sin(|k|ct)$$

und wir erhalten die (formale) Lösung

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \hat{f}(k) \cos(|k|ct) + \frac{\hat{g}(k)}{|k|c} \sin(|k|ct) \right\} e^{ik \cdot x} dk.$$

Sind  $f, g \in C_0^s(\mathbb{R}^n)$ , so gilt  $\hat{f}(k), \hat{g}(k) \leq \text{const} (1 + |k|)^{-s}$  und für  $s$  gross genug (z.B.  $\geq n + 2$ ) kann man unter dem Integral ableiten. Dies zeigt, dass  $u$  eine  $C^2$ -Lösung ist.

Diese Lösung kann expliziter beschrieben werden, so dass qualitative Eigenschaften ersichtlich werden. Wir machen das in  $n \leq 3$  Dimensionen, wobei der eindimensionale Fall als Übung empfohlen wird.

In *drei Dimensionen* benutzen wir die Identität

$$\frac{\sin(|k|R)}{|k|R} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|x|=R} e^{ik \cdot x} d\Omega(x).$$

*Beweis.* Wir benutzen Kugelkoordinaten mit  $z$ -Achse längs  $k$ :

$$\begin{aligned} \int_{|x|=R} e^{ik \cdot x} dx &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i|k|R \cos \vartheta} R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \stackrel{\cos \vartheta = z}{=} 2\pi R^2 \int_{-1}^1 e^{i|k|Rz} dz \\ &= 2\pi R^2 \frac{e^{i|k|R} - e^{-i|k|R}}{i|k|R} = 4\pi R^2 \frac{\sin(|k|R)}{|k|R}. \quad \square \end{aligned}$$

Mit  $R = ct$  erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{g}(k)}{|k|c} \sin(|k|ct) e^{ik \cdot x} dk &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{|y|=ct} \hat{g}(k) e^{ik \cdot x + ik \cdot y} dk d\Omega(y) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y|=ct} g(x+y) d\Omega(y). \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(k) \cos(|k|ct) e^{ik \cdot x} dk &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(k) \frac{\sin(|k|ct)}{|k|c} e^{ik \cdot x} dk \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y|=ct} f(x+y) d\Omega(y) \right). \end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösung des Cauchy-Problems in  $n = 3$  Dimensionen:

$$(4) \quad u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2 t} \int_{|y|=ct} f(x+y) d\Omega(y) \right) + \frac{1}{c^2 t} \int_{|y|=ct} g(x+y) d\Omega(y) \right]$$

Die Lösung des *zweidimensionalen* Problems kann nach Hadamard aus der Lösung des dreidimensionalen Problems hergeleitet werden: Sind die Anfangsbedingungen  $f, g$  unabhängig von  $x_3$ , so ist auch  $u(x, t)$  in (4) unabhängig von  $x_3$  und löst also die zweidimensionale Wellengleichung

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u(x, t) = 0.$$

Die Formel (4) kann also übernommen werden, wobei für  $f$  und  $g$  die Anfangsbedingungen des zweidimensionalen Problems eingesetzt werden. Wir parametrisieren die obere (untere) Halbsphäre durch die Projektion  $(y_1, y_2)$  auf die Ebene:  $y_3 = \pm\sqrt{c^2t^2 - y_1^2 - y_2^2}$ . Dann ist

$$d\Omega(y) = \frac{ct dy_1 dy_2}{\sqrt{c^2t^2 - y_1^2 - y_2^2}}$$

und die Lösung ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{|y| \leq ct} f(x+y) \frac{dy_1 dy_2}{\sqrt{c^2t^2 - |y|^2}} \right) + \int_{|y| \leq ct} g(x+y) \frac{dy_1 dy_2}{\sqrt{c^2t^2 - |y|^2}} \right] \quad (n=2)$$

Der Faktor 2 folgt, da die zwei Halbsphären denselbe Beitrag geben.

Das Phänomen der *endliche Propagationsgeschwindigkeit der Signale* ist für  $n=2,3$  ersichtlich: Verschwinden  $f, g$  ausserhalb einer Region von  $\mathbb{R}^3$ , die in einer Kugel von Radius  $R$  liegt, so verschwindet  $u(\cdot, t)$  für  $t \geq 0$  ausserhalb einer Kugel von Radius  $R + ct$ . Umgekehrt ist der Wert  $u(x, t)$  von  $u$  im Punkt  $(x, t)$  allein durch die Werte von  $f$  und  $g$  in einer Kugel von Radius  $ct$  bestimmt.

Der Vergleich zwischen den Lösungen in 2 und 3 Dimensionen zeigt aber den wesentlichen Unterschied zwischen Wellen in 2 und 3 Dimensionen: In 3 Dimensionen wird über eine *Kugeloberfläche*  $|y| = ct$  vom Radius  $ct$  integriert, in 2 Dimensionen dagegen über die ganze *Kreisscheibe*  $|y| \leq ct$ . Ein Anfangssignal  $f, g$  mit kompaktem Träger gibt in 3 Dimensionen eine Lösung  $u(x, t)$ , die bei festem  $t$  ausserhalb einer *Kugelschale* verschwindet (Huygensprinzip), und in 2 Dimensionen eine Lösung, die nur in einer *Kreisscheibe* vom Radius  $ct$  nicht verschwindet.

Man kann zeigen, dass das Huygensprinzip in allen *ungeraden* Dimensionen gilt: Verschwinden  $f$  und  $g$  ausserhalb einer Kugel von Radius  $\epsilon$  um  $x_0$ , so verschwindet  $u(\cdot, t)$  ausserhalb der *Kugelschale*  $\{x \in \mathbb{R}^n | ct - \epsilon < |x - x_0| < ct + \epsilon\}$

Übung: Man werfe einen Stein ins Wasser.

## 9. Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = D\Delta u$  beschreibt die Zeit- und Ortsabhängigkeit der Temperatur  $u(x, t)$  zur Zeit  $t$  im Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  in einem homogenen wärmeleitenden Medium. Die physikalische Konstante  $D > 0$  kann durch passender Wahl der Zeit oder Längeneinheiten als 1 angenommen werden.

Das Anfangswertproblem lautet

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Gesucht wird eine Lösung  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  (wir wollen nicht-differenzierbare Anfangsbedingungen  $f \in C(\mathbb{R}^n)$  zulassen). Wir nehmen *zunächst* an, dass  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Die Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \hat{u}(k, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-ik \cdot x} dx \\ \hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx \end{aligned}$$

führt auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(k, t) &= -k^2 \hat{u}(k, t) \\ \hat{u}(k, 0) &= \hat{f}(k) \end{aligned}$$

mit Lösung

$$\hat{u}(k, t) = e^{-k^2 t} \hat{f}(k).$$

Die Rücktransformation liefert die formale Lösung

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x - y) f(y) dy$$

wobei  $K$  der Wärmeleitungskern ist:

$$K_t(x) = \left( e^{-k^2 t} \right)^\vee(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}.$$

SATZ 9.1. Sei  $f$  stetig und beschränkt auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x - y) f(y) dy$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in  $C^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[)$  und für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$ .

*Beweis.* Die Funktion  $K_t(x)$  ist  $C^\infty$  in  $x$  und  $t$  für  $t > 0$ . Die Ableitungen von  $K_t(x)$  haben die Gestalt

$$\partial_t^j \partial^\alpha K_t(x) = t^{-\frac{n}{2} - 2j - |\alpha|} P(x, t) e^{-|x|^2/4t},$$

wobei  $P$  ein Polynom ist (Induktion nach  $j + |\alpha|$ ). Also solange  $t > 0$  fallen alle Ableitungen von  $K_t(x)$  exponentiell für  $|x| \rightarrow \infty$  ab. Daraus folgt dass für  $t > 0$  unter dem Integral abgeleitet werden darf, und dass  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[)$  ist. Dass  $u(x, t)$  die Wärmeleitungsgleichung erfüllt folgt also aus der Identität  $\partial_t K_t(x) - \Delta K_t(x) = 0$  ( $t > 0$ ). Es bleibt zu zeigen, dass  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x)$ . Wir benutzen die Identität (Gaussches Integral)

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x - y) dy = 1,$$

woraus folgt

$$u(x, t) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x - y) (f(x) - f(y)) dy.$$

Sei  $M = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)|$ , und  $\delta$  so klein, dass  $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$  für alle  $y$  mit  $|y - x| < \delta$ . Wir haben dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(x)| &\leq \int_{|x-y| < \delta} K_t(x - y) |f(x) - f(y)| dy \\ &\quad + \int_{|x-y| > \delta} K_t(x - y) |f(x) - f(y)| dy \\ &\leq \underbrace{\int_{|x-y| < \delta} K_t(x - y) dy}_{\leq 1} \frac{\epsilon}{2} + 2M \int_{|x-y| > \delta} K_t(x - y) dy. \end{aligned}$$

Für  $t > 0$  klein genug gilt

$$\int_{|x-y| > \delta} K_t(x - y) dy \stackrel{u=(x-y)/\sqrt{t}}{=} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{|u| > \delta/\sqrt{t}} e^{-|u|^2/4} du < \frac{\epsilon}{4M}.$$

Nach Einsetzen sieht man, dass zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $t_0 = t_0(\epsilon)$  existiert, so dass  $|u(x, t) - f(x)| < \epsilon$  für  $0 < t < t_0$ .  $\square$

BEMERKUNG 9.1. Leider hat das Anfangswertproblem für die Wärmeleitung keine eindeutige Lösung. Tychonoff hat 1935 gezeigt, dass es unendlich viele „unphysikalische“ Lösungen  $u(x, t)$  gibt, die die Anfangsbedingung  $u(x, 0) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  erfüllen. Diese Lösungen wachsen sehr schnell für  $|x| \rightarrow \infty$  und können ausgeschlossen werden, wenn das Wachstum von  $u$  in der Problemstellung eingeschränkt wird. Wenn beispielsweise  $f$  beschränkt ist, dann gibt es eine eindeutige *beschränkte* Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangstemperatur  $f$ .



## Orthogonale Funktionensysteme, Hilberträume, Eigenwertprobleme

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$ ,  $A$  eine hermitesche lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$ . Wir wissen dann, dass eine orthonormierte Basis  $\{\varphi_n\}$  von  $V$  existiert, so dass

$$A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm},$$

wobei  $\lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$  sind. Jeder Vektor in  $V$  kann in dieser Basis ausgedrückt werden

$$\varphi = \sum_{i=1}^N a_n \varphi_n, \quad N = \dim V,$$

und die Koeffizienten  $a_n$  werden durch die Formel  $a_n = (\varphi_n, \varphi)$  gegeben.

Wir wollen unendlichdimensionale Verallgemeinerungen betrachten. In unseren Anwendungen ist  $A$  ein Differenzialoperator und  $V$  ein Raum von Funktionen. Die Eigenvektoren von  $A$  werden oft entsprechend Eigenfunktionen genannt.

### 1. Beispiel: Die schwingende Saite

Die Bewegungsgleichung der schwingende Saite lautet

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0, \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(0, x) &= v(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) &= w(x). \end{aligned}$$

Wir benutzen die Methode der Separation der Variablen: man sucht zuerst Lösungen der Form  $f(t)g(x)$  und versucht die allgemeine Lösung als (möglicherweise unendliche) Summe solcher Lösungen zu konstruieren.

(a) Lösungen der Form  $u(t, x) = f(t)g(x)$

$$\frac{1}{c^2} f''(t)g(x) = f(t)g''(x)$$

Also hängt  $\frac{1}{c^2} \frac{f''(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}$  nicht von  $t$  und nicht von  $x$  ab, und ist deshalb gleich einer Konstante  $\lambda$ . Wir haben somit das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} g(x) &= \lambda g(x), & x \in [0, L], \\ g(0) &= g(L) = 0. \end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$g_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad \lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die Gleichung für  $f$  ist

$$f'' = \lambda c^2 f$$

welche die allgemeine Lösung  $f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$  besitzt, mit  $\omega = \sqrt{-c^2 \lambda}$ . Die allgemeinste Lösung der Form  $f(t)g(x)$  ist also

$$(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \left( \frac{\omega_n}{c} x \right),$$

wobei  $\omega_n = \frac{\pi n c}{L}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

(b) Da die Gleichung linear ist, ist auch jede Superposition

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \left( \frac{\omega_n}{c} x \right)$$

eine Lösung (falls die  $a_n, b_n$  schnell genug für  $n \rightarrow \infty$  abfallen). Die Koeffizienten  $a_n, b_n$  werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left( \frac{\pi n}{L} x \right) &= v(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n \sin \left( \frac{\pi n}{L} x \right) &= w(x). \end{aligned}$$

Die Kreisfrequenzen  $\omega_n$  heissen *Eigenkreisfrequenzen*. Die *Eigenfrequenzen*  $\nu_n = \omega_n / (2\pi)$  sind die Frequenzen (inverse Zeitperioden) mit welcher die Saite schwingen kann.

Kann jede "beliebige" Anfangsbedingung  $v(x), w(x)$  in der Basis  $\sin(\frac{\pi n}{L} x)$  der Eigenvektoren von  $d^2/dx^2$  entwickelt werden?

Aus der Theorie der Fourierreihen wissen wir, dass das für hinreichend reguläre  $v(x), w(x)$  möglich ist. Die Koeffizienten sind

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L v(x) \sin \left( \frac{\pi n}{L} x \right) dx, \\ b_n &= \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L w(x) \sin \left( \frac{\pi n}{L} x \right) dx \end{aligned}$$

(setze  $v, w$  auf  $[-L, L]$  fort durch  $v(-x) = -v(x)$  und  $w(-x) = -w(x)$ ).

## 2. Orthogonale Systeme, Hilberträume

Sei  $V$  ein komplexer oder reeller Vektorraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$ , d.h. eine Abbildung  $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}$ ) mit (i)  $(f, g) = \overline{(g, f)}$ , (ii)  $(f, \lambda g + \mu h) = \lambda(f, g) + \mu(f, h)$  und (iii)  $(f, f) \geq 0$ ,  $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ,  $f, g, h \in V$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}$ ). Dann definiert  $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$  eine Norm auf  $V$ .

BEISPIELE:

- (a)  $V = \mathbb{C}^n$ ,  $(f, g) = \sum \bar{f}_i g_i$ ,  $f, g \in \mathbb{C}^n$ .
- (b)  $V = L^2(E)$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  messbar,  $(f, g) = \int_E \overline{f(x)} g(x) dx$ .
- (c)  $V = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x) dx$ .
- (d)  $V = \ell^2 = \{\text{Folgen } (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{C} \text{ mit } \sum_i |\xi_i|^2 < \infty\}$ ,  $(\xi, \eta) = \sum_i \bar{\xi}_i \eta_i$ .

Das Integral in (b) ist wohldefiniert, denn mit Hilfe der elementaren Ungleichung  $|ab| \leq (|a|^2 + |b|^2)/2$  zeigt man, dass

$$\int_E |\overline{f(x)} g(x)| dx \leq \frac{1}{2} \left( \int_E |f(x)|^2 dx + \int_E |g(x)|^2 dx \right) < \infty$$

also  $\bar{f}g \in L^1$ . Analog in (d), hat man die Ungleichung  $\sum |\bar{\xi}_i \eta_i| \leq \frac{1}{2} (\sum |\xi_i|^2 + \sum |\eta_i|^2)$ . Also ist die Reihe die das Skalarprodukt definiert absolut konvergent.

LEMMA 2.1. (Schwarzsche Ungleichung) Sei  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  und  $f, g \in V$ . Dann gilt

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $f$  und  $g$  linear abhängig sind.

Beweis. Die Behauptung ist trivial für  $g = 0$ . Also sei  $g \neq 0$ . Für alle  $\lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$  gilt

$$0 \leq (f - \lambda g, f - \lambda g) = (f, f) - \lambda(f, g) - \bar{\lambda}(g, f) + |\lambda|^2(g, g).$$

Wähle  $\lambda = \overline{(f, g)} / (g, g)$ . Es folgt

$$0 \leq (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)}.$$

Gleichheit gilt nur wenn  $f - \lambda g = 0$ .  $\square$

DEFINITION 2.1. Eine Folge  $(f_n)_{n=1}^\infty$  in einem Vektorraum mit Skalarprodukt  $V$  konvergiert gegen  $f \in V$  falls

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wir schreiben dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  oder  $f_n \rightarrow f$  für  $n \rightarrow \infty$ .

LEMMA 2.2. Sei  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset V$  eine Folge, welche gegen  $f \in V$  konvergiert. Dann gilt für alle  $g \in V$

- (i)  $(f_n, g) \rightarrow (f, g)$ ,
- (ii)  $(g, f_n) \rightarrow (g, f)$ ,
- (iii)  $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$ .

In anderen Worten, Skalarprodukt und Norm sind stetig.

Beweis. (i) Nach Lemma 2.1  $|(f_n - f, g)| \leq \|f_n - f\| \|g\| \rightarrow 0$ , also  $(f_n, g) - (f, g) \rightarrow 0$ . (ii) analog. (iii) Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|\|f_n\| - \|f\|| \leq \|f_n - f\| \rightarrow 0. \quad \square$$

DEFINITION 2.2. Eine (endliche oder unendliche) Familie  $(\varphi_j)_{j \in J}$  von nichtverschwindenden Vektoren in  $V$  heisst *orthogonal* (oder orthogonales System) falls  $(\varphi_j, \varphi_k) = 0$  für alle  $j \neq k$ , *orthonormiert* (oder orthonormiertes System) falls zusätzlich  $(\varphi_j, \varphi_j) = 1$  für alle  $j \in I$ . Ein orthogonales System  $(\varphi_j)_{j \in I}$  heisst *vollständig* (oder *maximal*) falls für alle  $f \in V$

$$(\varphi_j, f) = 0 \forall j \Rightarrow f = 0.$$

Die Indexmenge  $I$  wird in unseren Anwendungen  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\{(0), 1, 2, 3, \dots\}$  oder  $\mathbb{Z}$ .

BEISPIELE:

- (a)  $V = \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (1 an der  $j$ ten Stelle).
- (b)  $V = L^2([0, 1])$ ,  $\varphi_j = e^{2\pi i j x}$ ,

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^1 \bar{\varphi}_j \varphi_k dx = \delta_{jk},$$

Somit ist  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  ein orthonormiertes System. Der  $j$ te Fourierkoeffizient von  $f \in L^2$  ist  $c_j = \int_0^1 e^{-2\pi i j x} f(x) dx = (\varphi_j, f)$ .

- (c)  $V = \ell^2$ . Die Folgen  $\varphi_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$  bilden ein orthonormiertes System.

SATZ 2.3. Sei  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt und  $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$  ein orthogonales System. Dann gilt

- (i)  $\|\varphi_1 + \dots + \varphi_n\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \dots + \|\varphi_n\|^2 \quad \forall n = 1, 2, \dots$  (Pythagoras),



(ii) Ist  $(\varphi_j)$  orthonormiert, so gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^n |(\varphi, \varphi_j)|^2 \leq \|\varphi\|^2 \quad (\text{Besselsche Ungleichung}),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $\varphi$  im von  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  aufgespannten Unterraum liegt.

(iii) Sei  $(\varphi_j)$  orthonormiert,  $\varphi \in V$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Die Funktion von  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

$$\left\| \varphi - \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \right\|^2$$

nimmt ihr Minimum für  $\lambda_j = (\varphi_j, \varphi)$ ,  $j = 1, \dots, n$  an.

**BEMERKUNG 2.1.** Die Behauptungen sind unendlichdimensionale Verallgemeinerungen von geometrischen Eigenschaften von endlichdimensionalen Vektorräumen. (iii) ist beispielweise die Aussage, dass die kürzeste Verbindungslinie zwischen einem Punkt und einem Unterraum senkrecht auf dem Unterraum steht.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \left( \sum_{i \leq n} \varphi_i, \sum_{i \leq n} \varphi_i \right) = \sum_{i, j \leq n} (\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{i \leq n} (\varphi_i, \varphi_i). \\ \text{(ii)} \quad & 0 \leq \left\| \varphi - \sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi) \varphi_j \right\|^2 = (\varphi, \varphi) - 2 \sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi) (\varphi, \varphi_j) + \sum_{j=1}^n |(\varphi_j, \varphi)|^2 \\ & = (\varphi, \varphi) - \sum_{j=1}^n |(\varphi_j, \varphi)|^2. \end{aligned}$$

(iii) Es gilt

$$\varphi - \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j = \underbrace{\varphi - \sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi) \varphi_j}_{\xi} + \underbrace{\sum_{j=1}^n ((\varphi_j, \varphi) - \lambda_j) \varphi_j}_{\eta}.$$

Da  $(\xi, \eta) = \sum_j (\varphi, \varphi_j) [(\varphi_j, \varphi) - \lambda_j] - \sum_j \overline{(\varphi_j, \varphi)} [(\varphi_j, \varphi) - \lambda_j] = 0$ , ist  $\|\xi + \eta\|^2 = \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2$ , also

$$\left\| \varphi - \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \right\|^2 = \left\| \varphi - \sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi) \varphi_j \right\|^2 + \sum_{j=1}^n |(\varphi_j, \varphi) - \lambda_j|^2. \quad \square$$

Sei  $V$  endlichdimensional und  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  ein orthonormiertes System. Dann ist  $(\varphi_j)$  genau dann maximal, wenn es eine *Basis* ist, d.h. wenn sich jedes  $\varphi \in V$  als Linearkombination der  $\varphi_j$  schreiben lässt. Im unendlichdimensionalen Fall sagen wir, dass ein orthonormiertes System  $(\varphi_j)$  eine *Basis* ist, wenn für alle  $\varphi \in V$ ,  $\varphi = \sum_j (\varphi_j, \varphi) \varphi_j$ , wobei die Reihe in  $V$  konvergiert. Ist  $(\varphi_j)$  eine Basis und  $\varphi \in V$  mit  $(\varphi_j, \varphi) = 0$ , für alle  $j$ , dann ist  $\varphi = 0$ . Also ist  $(\varphi_j)$  vollständig. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht [Gegenbeispiel: Seien  $\varphi_j = (\delta_{ij})_{i=0}^{\infty} \in \ell^2$  und  $V \subset \ell^2$  der Raum aller (endlichen) Linearkombinationen von  $\tilde{\varphi}_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  mit  $\tilde{\varphi}_0 = (2^{-i})_{i=0}^{\infty}$ . Dann ist das orthogonale System  $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$  maximal in  $V$  aber keine Basis]. Wir brauchen folgende zusätzliche Annahme.

**DEFINITION 2.3.** Ein komplexer oder reeller Vektorraum  $H$  mit Skalarprodukt heisst *Hilbertraum* wenn er bezüglich der Norm  $f \mapsto \|f\| = \sqrt{(f, f)}$  ein Banachraum (siehe Anhang A) ist, d.h. wenn alle Cauchy-Folgen bezüglich  $\|\cdot\|$  in  $H$  konvergieren.

Insbesondere ist  $L^2(E)$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  messbar, ein Hilbertraum. Man kann zeigen dass  $\ell^2$  ebenfalls ein Hilbertraum ist.

SATZ 2.4. Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$  ein orthonormiertes System. Folgende Aussagen sind äquivalent.

- (i)  $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$  ist vollständig.
- (ii)  $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j, \varphi) \varphi_j, \quad \forall \varphi \in H \quad (\text{Konvergenz in } H),$
- (iii)  $\|\varphi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(\varphi_j, \varphi)|^2, \quad \forall \varphi \in H \quad \text{Parseval Identität.}$

*Beweis.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Existenz des Limes. Sei  $s_n = \sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi) \varphi_j, n \geq m$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \left\| \sum_{j=m+1}^n (\varphi_j, \varphi) \varphi_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^n \|(\varphi_j, \varphi) \varphi_j\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |(\varphi_j, \varphi)|^2 \\ &\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} |(\varphi_j, \varphi)|^2 \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

wegen der Besselschen Ungleichung, also ist  $(s_n)$  eine Cauchy-Folge. Sei  $s = \lim s_n$ . Dann ist wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts (Lemma 2.2) für alle  $j$

$$\begin{aligned} (s - \varphi, \varphi_j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - \varphi, \varphi_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \overline{(\varphi_l, \varphi)} (\varphi_l, \varphi_j) - (\varphi, \varphi_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \overline{(\varphi_j, \varphi)} - (\varphi, \varphi_j) \right] = 0, \end{aligned}$$

also  $s = \varphi$ .

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Nach der Stetigkeit der Norm gilt:

$$\|\varphi\|^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|s_j\|^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j |(\varphi, \varphi_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_k)|^2.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei  $\varphi \in H$  mit  $(\varphi, \varphi_j) = 0$  für alle  $j$ . Dann ist nach (iii)  $\|\varphi\|^2 = 0$  also  $\varphi = 0$ .  $\square$

BEMERKUNG 2.2. Wenn  $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$  ein vollständiges orthogonales System im Hilbertraum  $H$  ist, dann ist  $((\varphi_n, \varphi_n)^{-1/2} \varphi_n)$  ein orthonormiertes System. Wir haben dann also für  $\varphi \in H$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi_n, \varphi)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n, \quad \|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\varphi_n, \varphi)|^2}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

DEFINITION 2.4. Ein vollständiges orthonormiertes System eines Hilbertraums heisst *orthonormierte Basis*.

Man beachte das im unendlichdimensionalen Fall eine orthonormierte Basis keine Basis im Sinne der linearen Algebra ist.

DEFINITION 2.5. Ein Hilbertraum heisst *separabel* falls er eine abzählbare orthonormierte Basis hat.

SATZ 2.5. Sei  $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$  eine orthonormierte Basis eines Hilbertraums  $H$ . Dann hat man ein linearer Isomorphismus  $i: \ell^2 \rightarrow H$

$$i: c = (c_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j,$$

und es gilt  $(i(c), i(d)) = (c, d)$  für alle  $c, d \in \ell^2$ .

*Beweis.* Zu zeigen ist erstens, dass  $i(c) \in H$  d.h. dass die Folge der Partialsummen  $s_n = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$  in  $H$  konvergiert. Da  $H$  ein Hilbertraum ist, genügt es zu zeigen, dass sie eine Cauchy-Folge ist: Sei  $c \in \ell^2$ . Für  $n \geq m \rightarrow \infty$ ,

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^n c_j \varphi_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |c_j|^2 \rightarrow 0,$$

da die Zahlenfolge  $n \mapsto \sum_{j=1}^n |c_j|^2$  konvergiert und somit eine Cauchy-Folge ist. Es ist klar dass  $i$  linear ist. Da das Skalarprodukt stetig in beiden Argumenten ist, gilt

$$\begin{aligned} (i(c), i(d)) &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j, \sum_{j=1}^m d_j \varphi_j \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \bar{c}_j d_j \\ &= (c, d). \end{aligned}$$

Insbesondere  $\|i(c)\|^2 = \|c\|^2$ . Nach Satz 2.4 ist  $i$  surjektiv. Der Kern ist trivial, da aus  $i(c) = 0$  folgt  $\|c\| = \|i(c)\| = 0$ .  $\square$

Insbesondere hat man:

**KOROLLAR 2.6.** Sei  $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$  eine orthonormierte Basis eines Hilbertraums  $H$ . Dann konvergiert

$$\sum_{j=1}^\infty c_j \varphi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$$

in  $H$  genau dann, wenn  $\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 < \infty$ .

### 3. $L^2$ -Theorie der Fourierreihen

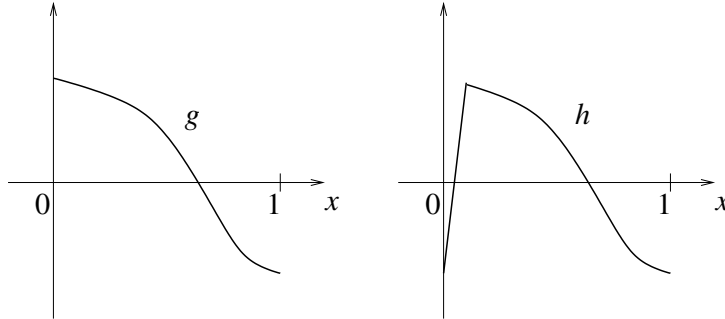
**SATZ 3.1.** Sei  $f \in L^2([0, 1])$ ,  $\varphi_j(x) = e^{2\pi i j x}$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) und  $c_j = (\varphi_j, f)$  der  $j$ te Fourierkoeffizient von  $f$ . Dann gilt

- (i)  $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \varphi_j$
- (ii)  $\int_0^1 |f|^2 dx = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |c_j|^2$  (Parseval)

*Beweis.* Sei  $g$  stetig mit  $\|f - g\|_2 < \epsilon/3$ . Wir dürfen o.E.d.A. annehmen, dass  $g(0) = g(1)$ , denn wir können die Funktion  $g$  durch eine stetige Funktion  $h$  mit  $h(0) = h(1)$  ersetzen, die sich von  $g$  nur im Intervall  $[0, \delta]$  unterscheidet (Siehe Abb. 1).

Für  $\delta$  klein ist  $\|h - g\|_2 = (\int_0^\delta |h - g|^2 dx)^{1/2}$  beliebig klein. Sei  $\sum_{|j| \leq n} \lambda_j \varphi_j$  ein trigonometrisches Polynom mit  $\max_{x \in [0, 1]} |g(x) - \sum \lambda_j \varphi_j(x)| < \epsilon/3$  (Satz von Fejér). Nach Satz 2.3 (iii) und (i) gilt

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{|j| \leq n} (\varphi_j, f) \varphi_j \right\| &\leq \|f - g\| + \left\| g - \sum_{|j| \leq n} (\varphi_j, g) \varphi_j \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{|j| \leq n} ((\varphi_j, g) - (\varphi_j, f)) \varphi_j \right\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \left\| g - \sum_{|j| \leq n} \lambda_j \varphi_j \right\| + \left( \sum_{|j| \leq n} |(\varphi_j, g - f)|^2 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{\text{Bessel}}{\leq} \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \|f - g\| < \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

ABBILDUNG 1. Die Funktion  $h$ 

#### 4. Hermite-Polynome und harmonischer Oszillator

DEFINITION 4.1. Das  $n$ te Hermite-Polynom ist

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Mit Induktion zeigt man leicht, dass  $H_n$  ein Polynom von Grad  $n$  ist.

SATZ 4.1. Die Funktionen

$$\psi_n(x) = \pi^{-1/4} 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

bilden ein vollständiges ortonormiertes System in  $L^2(\mathbb{R})$ .

Wir haben diese Funktionen (mit leicht verschiedener Normierung) als Eigenfunktionen der Fouriertransformation im Kapitel 2 gesehen (S. Beispiel 3.3).

Zum Beweis führen wir die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x + \frac{d}{dx} \right), \quad A^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x - \frac{d}{dx} \right),$$

von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ein.

LEMMA 4.2. Sei  $\phi_n = 2^{-n/2} H_n(x) e^{-x^2/2}$ .

- (i)  $AA^* - A^*A = 1$ .
- (ii)  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow (A^*\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ .
- (iii)  $A\phi_0 = 0$ .
- (iv)  $A^*\phi_n = \phi_{n+1}$ .

*Beweis.* Seien  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(i) Man hat

$$\begin{aligned} [A, A^*]\varphi &= \frac{1}{2} \left[ \left( x + \frac{d}{dx} \right) (x\varphi - \varphi') - \left( x - \frac{d}{dx} \right) (x\varphi + \varphi') \right] \\ &= \frac{1}{2} [x^2\varphi - \varphi'' - x\varphi' + \varphi + x\varphi' - x^2\varphi + \varphi + x\varphi' + \varphi'' - x\varphi'] \\ &= \varphi \end{aligned}$$

$$(ii) \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \left( x + \frac{d}{dx} \right) \varphi \psi dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \varphi \left( x - \frac{d}{dx} \right) \psi dx$$

$$(iii) \left( x + \frac{d}{dx} \right) e^{-x^2/2} = 0$$

$$(iv) \frac{d}{dx}\phi_n(x) = 2^{-n/2}(-1)^n x e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} - \sqrt{2}\phi_{n+1}(x).$$

□

Aus (i) folgt nach Induktion

$$[A, (A^*)^n] = n(A^*)^{n-1}.$$

Also haben wir für  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} (\phi_n, \phi_m) &\stackrel{(iv)}{=} ((A^*)^n \phi_0, (A^*)^m \phi_0) = (A^*(A^*)^{n-1} \phi_0, (A^*)^m \phi_0) \\ &\stackrel{(ii)}{=} ((A^*)^{n-1} \phi_0, A(A^*)^m \phi_0) \stackrel{(iii)}{=} ((A^*)^{n-1} \phi_0, [A, (A^*)^m] \phi_0) \\ &= m(\phi_{n-1}, \phi_{m-1}). \end{aligned}$$

Insbesondere für  $m = 0$  folgt  $(\phi_n, \phi_0) = 0 \forall n \geq 1$ . Also für  $m \leq n$

$$(\phi_n, \phi_m) = m(m-1) \cdots 2 \cdot 1 (\phi_{n-m}, \phi_0).$$

Also gilt  $(\phi_n, \phi_m) = 0$  für  $n \neq m$  und  $(\phi_n, \phi_n) = n!(\phi_0, \phi_0)$ . Es bleibt  $(\phi_0, \phi_0)$  auszurechnen

$$(\phi_0, \phi_0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Also

$$(\phi_n, \phi_m) = \delta_{nm} n! \sqrt{\pi},$$

woraus folgt, dass die Funktionen

$$\psi_n = \pi^{-1/4} (n!)^{-1/2} \phi_n$$

orthonormiert sind. Nun zur Vollständigkeit: Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $(\phi_j, f) = 0$  für alle  $j$ . Betrachte die Funktion von  $x, t \in \mathbb{R}$  und ihre Taylorentwicklung

$$F(x, t) = e^{\frac{x^2}{2} - (x+it)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \frac{(-i2^{1/2}t)^n}{n!}.$$

Mit dem Satz von Lebesgue (s.u.) folgt für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$(5) \quad \int_{\mathbb{R}} F(x, t) f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i2^{1/2}t)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x) f(x) dx = 0.$$

Andererseits ist

$$\int_{\mathbb{R}} F(x, t) f(x) dx = e^{t^2} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2} - 2ixt} dx = e^{t^2} \hat{g}(2t).$$

Die Funktion  $g(x) := f e^{-x^2/2}$  ist in  $L^1$ , denn  $f \in L^2$  und  $e^{-x^2/2} \in L^2$  (Siehe die Überlegung vor Lemma 2.1). Es folgt somit aus  $\hat{g}(2t) = 0 \forall t$ , dass  $f(x) e^{-x^2/2} = 0$ . Also verschwindet  $f$  in  $L^2$ .

Anwendbarkeit von Lebesgue in (5): Nach der Cauchy Ungleichung für Koeffizienten von konvergenen Potenzreihen gilt für alle  $R$

$$\left| \frac{\phi_n(x) 2^{n/2}}{n!} \right| \leq R^{-n} \max_{|z|=R} |F(x, z)| \leq R^{-n} e^{-\frac{x^2}{2} + 2|x|R + R^2}.$$

Also gilt für  $R$  gross (z.B.  $R \geq 2|t|$ )

$$\sum_{n=0}^N \phi_n(x) \frac{(-i2^{1/2}t)^n}{n!} \leq \frac{1}{1 - |t|/R} e^{-\frac{x^2}{2} + 2|x|R + R^2},$$

und die rechte Seite ist integrierbar als Funktion von  $x$ . □

BEMERKUNG 4.1. Der Hermitesche Operator

$$H = A^*A + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2$$

ist der Hamiltonoperator für den quantenmechanischen *harmonischen Oszillator*. Die Eigenwerte von  $H$  haben die Interpretation von *Energien*. Wir haben einen vollständigen System von Eigenvektoren konstruiert, die die Eigenwertgleichung

$$H\psi_n = E_n\psi_n$$

(zeitunabhängige Schrödingergleichung) mit  $E_n = n + \frac{1}{2}$  erfüllen.

KOROLLAR 4.3.  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist dicht in  $L^2(\mathbb{R})$ , d.h. zu jedem  $\epsilon > 0$  und  $f \in L^2(\mathbb{R})$  existiert ein  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  mit

$$\|f - \varphi\|_2 < \epsilon.$$

*Beweis.* Folgt aus  $\|f - \sum_{j=1}^n (\psi_j, f)\psi_j\|_2 \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) und  $\psi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .  $\square$

## 5. Orthogonale Polynome, Legendre Polynome

Hermite-Polynome sind ein Beispiel von orthogonalen Polynomen. Sei  $E \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so dass

- (i)  $\rho(x) \geq 0$  für fast alle  $x \in E$ .
- (ii) Für alle  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\int_E |x|^n \rho(x) dx < \infty$ .

Dann definiert  $(f, g) = \int_E \bar{f}(x)g(x)\rho(x) dx$ ,  $f, g \in \mathbb{C}[x]$  ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum  $\mathbb{C}[x]$  der Polynome in einer Variable mit komplexen Koeffizienten. Zu diesen Daten  $(E, \rho)$  gehört eine Familie von *orthogonalen Polynomen*  $p_0, p_1, p_2, \dots$ . Sie sind nach Gram-Schmidt eindeutig durch folgende Eigenschaften bestimmt:

- (i) Für jedes  $j$  ist  $p_j(x) = x^j + \dots$  ein Polynom vom Grad  $j$  mit Leitkoeffizient 1.
- (ii)  $(p_j, p_k) = 0$  für alle  $j \neq k$ .

Die Existenz dieser Polynome folgt aus dem Gram-Schmidt Verfahren angewendet auf die Basis  $m_j(x) = x^j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ : Man definiert rekursiv  $p_0 = 1$  und

$$(6) \quad p_j = m_j - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(p_k, m_j)}{(p_k, p_k)} p_k.$$

Die Eindeutigkeit ist ebenfalls klar: Jedes Polynom von Grad  $j$  ist eine Linearkombination von  $m_j$  und  $p_0, \dots, p_{j-1}$ . Damit  $p_j$  Leitkoeffizient hat und senkrecht auf  $p_0, \dots, p_{j-1}$  steht, ist die Linearkombination eindeutig bestimmt und durch (6) gegeben sein.

In der Praxis ist es oft nützlich die orthogonalen Polynome anders zu normieren und nicht darauf zu insistieren, dass der Leitkoeffizient 1 ist.

BEISPIEL 5.1. Die Hermite-Polynome  $H_n$  sind die orthogonalen Polynome (mit Leitkoeffizient  $2^n$ ) für  $E = \mathbb{R}$  und  $\rho(x) = \exp(-x^2)$ .

Ein weiteres wichtiges Beispiel, das wir jetzt betrachten, ist wenn  $E$  ein kompaktes Intervall ist und  $\rho = 1$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $E = [-1, 1]$  ist. Die zugehörigen orthogonalen Polynome sind (bis auf Normierung) die *Legendre-Polynome*. Sie haben folgende alternative Definition (Rodrigues-Formel):

DEFINITION 5.1. Das  $l$ te Legendre-Polynom ist

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

LEMMA 5.1.

- (i)  $P_\ell$  hat Grad  $\ell$ ,  
(ii)  $\int_{-1}^1 P_\ell(x)P_{\ell'}(x)dx = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$   
(iii)  $P_\ell(1) = 1$ .

Also sind die Polynome  $\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}P_\ell$  orthonormiert. Für jedes  $N$  bilden somit die  $N+1$  Polynome  $(\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}P_\ell)_{\ell=0}^N$  eine ortonormierte Basis des Vektorraums der Polynome vom Grade  $\leq N$ . Nach Satz 2.3 ist für

$$P = \sum_{\ell=0}^N \frac{2\ell+1}{2} (P_\ell, u) P_\ell(x)$$

die Grösse  $\|P-u\|_2 = (\int_{-1}^1 |P(x)-u(x)|^2 dx)^{1/2}$  minimal unter allen  $P$  vom Grade  $\leq N$ . In anderen Worten ist  $P$  die beste Approximation von  $f$  in  $L^2([-1, 1])$  unter allen Polynomen von Grad  $\leq N$ .

*Beweis des Lemmas.* (i) ist klar, da  $P_\ell$  die  $\ell$ -te Ableitung eines Polynoms von Grad  $2\ell$ . (ii) Für  $\ell' < \ell$  gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} (P_\ell, P_{\ell'}) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2-1)^\ell \frac{1}{2^{\ell'} \ell'!} \frac{d^{\ell'}}{dx^{\ell'}} (x^2-1)^{\ell'} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(-1)^\ell}{2^{\ell+\ell'} \ell! \ell'!} (x^2-1)^\ell \frac{d^{\ell+\ell'}}{dx^{\ell+\ell'}} (x^2-1)^{\ell'} dx. \end{aligned}$$

Es treten keine Randterme auf, denn  $\frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^\ell \Big|_{x=\pm 1} = 0$  für  $m < \ell$ . Da  $(x^2-1)^{\ell'}$  Grad  $2\ell'$  hat und  $\ell + \ell' > 2\ell'$  ist, ist  $(\frac{d}{dx})^{\ell+\ell'} (x^2-1)^{\ell'} = 0$ . Es folgt also für  $\ell' < \ell$

$$(P_\ell, P_{\ell'}) = (P_{\ell'}, P_\ell) = 0.$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $(P_\ell, P_\ell) = \frac{2}{2\ell+1}$ .

$$(P_\ell, P_\ell) = \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell} (\ell!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^\ell \left(\frac{d}{dx}\right)^{2\ell} (x^2-1)^\ell dx = \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell} (\ell!)^2} (2\ell)! \int_{-1}^1 (x^2-1)^\ell dx.$$

Das Integral  $I_\ell = \int_{-1}^1 (x^2-1)^\ell dx$  kann man rekursiv berechnen. Für  $\ell \geq 1$  gilt

$$I_\ell = \int_{-1}^1 1 \cdot (x^2-1)^\ell dx \stackrel{\text{p.I.}}{=} -\ell \int_{-1}^1 x \cdot 2x(x^2-1)^{\ell-1} dx = -2\ell(I_\ell + I_{\ell-1}),$$

woraus wir die Rekursionsformel

$$I_\ell = -\frac{2\ell}{2\ell+1} I_{\ell-1}$$

mit  $I_0 = 2$  erhalten. Also

$$I_\ell = (-1)^\ell \frac{2\ell(2\ell-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2\ell+1)(2\ell-1)\cdots 3 \cdot 1} \cdot 2 = (-1)^\ell \frac{2^{2\ell} (\ell!)^2}{(2\ell+1)!} \cdot 2.$$

Somit ist

$$(P_\ell, P_\ell) = \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{2^{2\ell} (\ell!)^2} \frac{(-1)^\ell 2^{2\ell} (\ell!)^2}{(2\ell+1)!} \cdot 2 = \frac{2}{2\ell+1}.$$

- (iii)  $\frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} [(x-1)^\ell (x+1)^\ell] \Big|_{x=1} = \frac{1}{2^\ell \ell!} \ell! (x+1)^\ell \Big|_{x=1} = 1. \quad \square$

Wir betrachten jetzt den Differentialoperator auf dem Vektorraum der Polynome in  $x$

$$u \mapsto Lu = \frac{d}{dx} \left[ (x^2-1) \frac{d}{dx} \right] u.$$

$L$  ist ein Hermitescher Operator:

$$\begin{aligned} (Lu, v) &= \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left( (x^2 - 1) \frac{d}{dx} \bar{u} \right) v dx \\ &= - \int_{-1}^1 (x^2 - 1) \frac{d}{dx} \bar{u} \frac{d}{dx} v dx + (x^2 - 1) \bar{u} v' \Big|_{-1}^1 \\ &= \int_{-1}^1 \bar{u} L v dx - (x^2 - 1) \bar{u}' v \Big|_{-1}^1 = (u, Lv). \end{aligned}$$

Die Randterme verschwinden wiederum, da  $x^2 - 1$  am Rande verschwindet.

**SATZ 5.2.** (i) Die Legendre Polynome  $P_\ell$  sind Eigenvektoren von  $L$  zu den Eigenwerten  $\ell(\ell + 1)$ . In anderen Worten sie erfüllen die (spezielle) Legendre-Differenzialgleichung

$$(7) \quad \frac{d}{dx} \left[ (x^2 - 1) \frac{d}{dx} \right] P_\ell(x) = \ell(\ell + 1) P_\ell(x).$$

(ii) Die orthonormierten Polynome  $\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}} P_\ell$  bilden ein vollständiges orthonormiertes System in  $L^2([-1, 1])$ .

**BEMERKUNG 5.1.** Die allgemeine Form der Legendre-Differenzialgleichung, die von einem weiteren Parameter  $m$  abhängt, wird später eingeführt, S. (9).

*Beweis.* (i)  $LP_\ell$  ist ein Polynom vom Grade  $\leq \ell$ , also eine Linearkombination von  $P_\ell, P_{\ell-1}, \dots, P_0$ . Der Koeffizient von  $P_{\ell'}$ ,  $\ell' < \ell$ , in dieser Linearkombination ist proportional zu

$$(P_{\ell'}, LP_\ell) = (LP_{\ell'}, P_\ell) = 0,$$

denn  $LP_{\ell'}$  hat Grad  $\leq \ell' < \ell$ . Also  $LP_\ell = \lambda_\ell P_\ell$ . Bestimmung von  $\lambda_\ell$  durch Vergleich der Koeffizienten von  $x^\ell$ : Setze  $P_\ell(x) = a_\ell x^\ell + a_{\ell-1} x^{\ell-1} + \dots$ . Dann ist

$$\begin{aligned} LP_\ell &= \left( (x^2 - 1) \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} \right) (a_\ell x^\ell + \dots) \\ &= (\ell(\ell - 1) + 2\ell) a_\ell x^\ell + \dots \\ &= \ell(\ell + 1) a_\ell x^\ell + \dots \end{aligned}$$

(ii) Die Vollständigkeit wird wie bei den Fourierreihen bewiesen. Dabei wird der Satz von Weierstrass benutzt: Zu jedem  $\epsilon > 0$  und  $f \in C[-1, 1]$  existiert ein Polynom  $P$  mit  $|f(x) - P(x)| < \epsilon$  für alle  $x \in [-1, 1]$ . Details als Übung.  $\square$

Eine für die Physik wichtige Eigenschaft der Legendre-Polynome ist die folgende.

**LEMMA 5.3.** Seien  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  mit  $r := |x| > |x'| =: r'$ . Mit  $\cos \theta = \frac{x \cdot x'}{r r'}$  gilt dann

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r r' \cos \theta + (r')^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus der Taylorreihenentwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2tz}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(z) t^l,$$

konvergent für  $|t| < 1$ ,  $|z| \leq 1$ , die in der Serie gezeigt wird.  $\square$

Die Aussage ist physikalisch wichtig für die Physik, da (in 3 Dimensionen) das Coulomb-Potential einer Ladung in  $x'$  gerade proportional zu  $\frac{1}{|x - x'|}$  ist. Allgemein



in Dimension  $n \geq 3$  hat dieses Potential (wie wir später sehen werden) die Form  $\frac{1}{|x-x'|^{n-2}}$ . Auch in diesem Fall hat man eine Reihenentwicklung

$$\frac{1}{(1+t^2-2tz)^\alpha} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l^{(\alpha)}(z)t^l$$

wobei die Polynome  $C_l^{(\alpha)}$  die sogenannten Gegenbauer Polynome sind. Diese sind auch orthogonale Polynome bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \bar{f}g(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx$$

**BEMERKUNG 5.2.** Weitere wichtige Beispiele von orthogonalen Polynomen sind: Die Laguerre Polynome, mit  $E = [0, \infty)$ ,  $\rho(x) = \exp(-x)$ , die in eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik des Wasserstoffatoms spielen; die Tschebyschow-Polynome mit  $E = [-1, 1]$  mit  $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$  (Tschebyschow-Polynome erster Gattung) oder  $\rho(x) = (1-x^2)^{1/2}$  (Tschebyschow-Polynome zweiter Gattung) der Interpolationstheorie; die Jacobi-Polynome mit  $E = [-1, 1]$  und  $\rho(x) = (1-x)^a(1+x)^b$ ,  $a, b > -1$ . Letztere verallgemeinern Legendre- und Tschebyschow-Polynome und sind bis auf Normierung die Gaussischen hypergeometrische Reihen mit Parametern, wofür die Reihe abbricht:

$$P_n(x) = \frac{(a+1)_n}{n!} F(-n, a+b+n+1, a+1, x)$$

Die hypergeometrische Reihe ist  $F(a, b, c, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n$  mit  $(y)_n = y(y+1) \cdots (y+n-1)$ .

## 6. Schwingungen einer kreisförmigen Membran

Kleine Schwingungen einer an einem kreisförmigen Rand befestigten elastischen Membran werden durch das Randwertproblem

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} - \Delta v(t, x) = 0, & |x| < R \\ v(t, x) = 0, & |x| = R \end{cases}$$

beschrieben. Hier bezeichnet  $v(t, x)$  die vertikale Abweichung von der Gleichgewichtslage der Membran am Punkt  $x = (x_1, x_2)$  zur Zeit  $t$ . Nach Separation der Variablen betrachten man Lösungen der Form  $v(t, x) = e^{i\omega t} u(x)$ . Real- und Imaginärteil solcher Lösungen sind Zeitperiodische Lösungen, die also Schwingungen mit fester Kreisfrequenz  $\omega$ , also Periode  $2\pi/\omega$ , darstellen. Sie heissen Eigenschwingungen:  $u$  soll dabei das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{\omega^2}{c^2} u, & |x| < R \\ u(x) = 0, & |x| = R \end{cases}$$

lösen. Die erste Gleichung wird vorteilhaft in Polarkoordinaten umgeschrieben:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u(r, \varphi) = -\frac{\omega^2}{c^2} u(r, \varphi), & r < R \\ u(R, \varphi) = 0. \end{cases}$$

Separiert man wieder die Variablen, so erhält man  $u(r, \varphi) = U(r)V(\varphi)$  mit  $V(\varphi) = e^{im\varphi}$  und  $m$  ganzzahlig. Die Gleichung für  $U$  wird

$$U'' + \frac{1}{r}U' + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) U = 0.$$

Wir setzen  $U(r) = J(\omega r/c)$ . Dann erfüllt  $J$  die Besselsche Differenzialgleichung

$$J''(x) + \frac{1}{x}J'(x) + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) J(x) = 0.$$

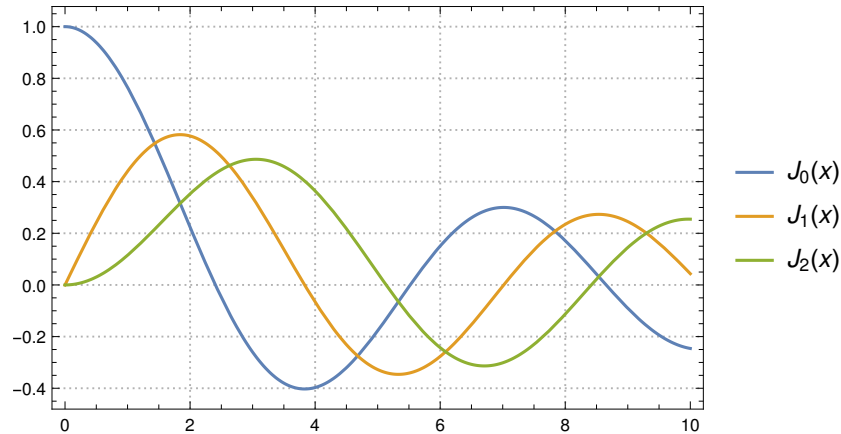


ABBILDUNG 2. Die Besselfunktionen  $J_0, J_1, J_2$ .

Diese Gleichung hat zwei linear unabhängige Lösungen. Wir suchen aber eine Lösung, die regulär für  $x = 0$  ist. Ein Potenzreihenansatz ergibt die *Besselfunktion*  $J_m$  als reguläre Lösung:

$$J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(r+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}.$$

Reelle Lösungen, die auch die Randbedingung erfüllen, sind dann von der Form

$$u = J_m(\omega r/c)(A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi)) = J_m(\omega r/c)A \cos(m(\varphi - \varphi_0)),$$

wobei  $J_m(\omega R/c) = 0$ . Also sind die möglichen Schwingungskreisfrequenzen von der Form  $\omega = cx/R$ , wobei  $x$  über die positiven Nullstellen der Besselfunktionen durchläuft. Es stellt sich heraus, dass  $J_m$  unendlich viele positive Nullstellen  $x_{m,1} < x_{m,2} < x_{m,3} < \dots$ , wie man sich am besten durch die graphische Darstellung dieser Funktionen überzeugt (für Beweise siehe man Whittaker–Watson). Abb. 2 wurde mit der *Mathematica*-Anweisung

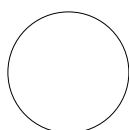
```
Plot[{BesselJ[0, x], BesselJ[1, x], BesselJ[2, x]}, {x, 0, 10},
PlotTheme -> "Detailed"]
```

erzeugt

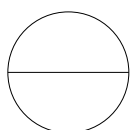
Die kleinsten Nullstellen, die den tiefsten Schwingungsfrequenzen entsprechen, sind ungefähr  $x_{0,1} = 2.40$ ,  $x_{1,1} = 3.83$ ,  $x_{2,1} = 5.13$ ,  $x_{0,2} = 5.52$ ,  $x_{1,2} = 7.02$ ,  $x_{3,1} = 6.38$ , (in *Mathematica* ist  $x_{m,j}$  durch  $N[\text{BesselJZero}[m, j]]$  berechnet). Die entsprechenden Eigenschwingungen sind (Real- und Imaginärteil von)

$$u(r, \varphi)e^{i\omega_{n,m}t}, \quad u(r, \varphi) = J_m(x_{n,m}r/R)(A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi))$$

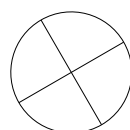
mit der Kreisfrequenz  $\omega_{n,m} = x_{n,m}c/R$ . Diese Eigenschwingungen unterscheiden sich voneinander qualitativ durch ihre *Knotenlinien*. Diese bestehen aus den Nullstellen von  $u$  also den Punkten wo die Membran sich nicht bewegt. Die Knotenlinien sind Kreise oder Durchmesser und entsprechen den Nullstellen der Besselfunktionen bzw. der trigonometrischen Funktionen von  $\varphi$ . Für die tiefsten 4 Frequenzen sehen die Knotenlinien wie folgt aus:



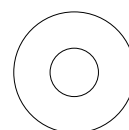
$$\omega_{0,1} = 2.40c/R.$$



$$\omega_{1,1} = 3.83c/R.$$



$$\omega_{2,1} = 5.13c/R.$$



$$\omega_{1,2} = 5.52c/R.$$

### 7. Kugelfunktionen

Wir haben eine Orthonormalbasis von  $L^2(S^1)$  gegeben durch die Funktionen  $e^{im\varphi}$  mit  $m \in \mathbb{Z}$ . Die wichtige Eigenschaft dieser Funktionen ist, dass sie Eigenfunktionen bzgl. des Laplace-Operators auf  $S^1$  sind, also

$$\Delta_{S^1} e^{im\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} e^{im\varphi} = -m^2 e^{im\varphi}.$$

Ziel: Wir wollen nun ähnlich eine ONB von  $L^2(S^{n-1})$  durch Eigenfunktion von  $\Delta_{S^{n-1}}$  finden, also durch Funktionen  $Y$ , die erfüllen

$$\Delta_{S^{n-1}} Y = -\lambda Y.$$

DEFINITION 7.1. Eine Funktion  $f$  heisst *harmonisch*, falls  $\Delta f = 0$ . Ein *harmonisches Polynom*  $p$  ist ein Polynom mit  $\Delta p = 0$ .

Idee: Sei  $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{=l}$  harmonisch, homogen von Grad  $l$ . Sei  $X = \frac{x}{|x|}$  und  $r = |x|$ , also  $x = rX$ , mit  $X \in S^{n-1}$ . Dann ist  $p(x) = p(rX) = r^l p(X)$ . Da  $p$  harmonisch ist gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta p \\ &= \left( \partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{n-1}} \right) (p) \\ &= l(l-1)r^{l-2}p(X) + \frac{n-1}{r} l r^{l-1} p(X) + \frac{1}{r^2} r^l \Delta_{S^{n-1}} p(X) \\ &\iff \\ \Delta_{S^{n-1}} p(X) &= (-l(l-1) - (n-1)l) p(X) \\ &= -l(l+n-2) p(X) \end{aligned}$$

Also erhalten wir Eigenfunktionen von  $\Delta_{S^{n-1}}$  zum Eigenwert  $-l(l+n-2)$  durch Einschränkung von homogenen harmonischen Polynomen vom Grad  $l$  auf  $S^{n-1}$ . Wir bemerken noch, dass im wichtigen Fall  $n = 3$  die so erhaltenen Eigenwerte gerade  $-l(l+1)$  sind.

DEFINITION 7.2. Die *Kugelfunktion* (vom Grad  $l$ ) sind die Einschränkungen von harmonischen Polynomen (homogen vom Grad  $l$ ) auf  $S^{n-1}$ .

Man kann den Raum dieser harmonischen Polynome vollständig bestimmen. Dies folgt aus dem folgenden Satz, der in den Übungen bewiesen wird.

SATZ 7.1. Sei  $\mathcal{H}_l \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{=l}$  der Raum der homogenen, harmonischen Polynome vom Grad  $l$ . Dann folgt

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{=l} = (x_1^2 + \dots + x_n^2) \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{=l-2} \oplus \mathcal{H}_l.$$

KOROLLAR 7.2. Es ist

$$\dim(\mathcal{H}_l) = \dim(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{=l}) - \dim(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{=l-2}) = \binom{n+l-1}{n-1} - \binom{n+l-3}{n-1},$$

wobei das Binom rechts als 0 zu interpretieren ist falls  $l = 0$  oder  $l = 1$ . Insbesondere erhält man in  $n = 2$  Dimensionen

$$\dim(\mathcal{H}_l) = \begin{cases} 1 & \text{falls } l = 0 \\ 2 & \text{falls } l > 0 \end{cases}$$

und in  $n = 3$  Dimensionen

$$\dim(\mathcal{H}_l) = \binom{l+2}{2} - \binom{l}{2} = \frac{(l+2)(l+1)}{2} - \frac{l(l-1)}{2} = 2l+1$$

KOROLLAR 7.3. Die Kugelfunktionen sind dicht in  $L^2(S^{n-1})$ .

Zum Beweis benötigen wir den folgenden Satz.

**SATZ 7.4** (Satz von Weierstrass). *Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann sind die Einschränkungen der Polynome auf  $K$ , also das Bild von  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , dicht im Raum  $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ .*

Der Satz wird in den Übungen bewiesen für  $n = 1$  und  $K \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Den allgemeinen Fall wollen wir hier nicht beweisen.

*Beweis vom Korollar.* Aus Satz 7.1 folgt, dass man jedes Polynom darstellen kann als Linearkombination von Polynomen der Form  $(x_1^2 + \dots + x_n^2)^k h$ , mit  $h$  harmonisch. Nach dem Satz von Weierstrass sind die Polynome  $\|\cdot\|_\infty$ -dicht in  $C(S^{n-1})$ . Also sind die harmonischen Polynome  $\|\cdot\|_\infty$ -dicht in  $C(S^{n-1})$ , demnach auch  $\|\cdot\|_2$ -dicht.

Aber die stetigen Funktionen sind dicht in  $L^2(S^{n-1})$ .  $\square$

**BEISPIEL 7.1.** Für  $n = 2$  ist  $\Delta_{S^1} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ . Eine Basis von  $\mathcal{H}_l$  ist gegeben durch die konstante Funktion 1 für  $l = 0$  und durch  $(x + iy)^l = r^l e^{il\varphi}$ ;  $(x - iy)^l = r^l e^{-il\varphi}$  mit  $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} e^{\pm il\varphi} = l^2 e^{\pm il\varphi}$  für  $l > 0$ .

In Dimension  $n = 3$  werden mehr Werkzeuge benötigt, man kann aber dennoch eine explizite Basis für die Kugelfunktionen angeben.

**DEFINITION 7.3.** Wir definieren für  $l = 0, 1, 2, \dots$  und  $m = -l, \dots, l$  die Kugelfunktionen

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \underbrace{\frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}}_{\text{Normierungsfaktor}} P_{l,m}(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

wobei  $P_{l,m}(Z)$  die assoziierten Legendre Funktionen sind, definiert durch

$$P_{l,m}(Z) = \frac{(1-Z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \cdot \frac{d^{m+1}}{dZ^{m+1}} (Z^2 - 1)^l \stackrel{m \geq 0}{=} (1-Z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dZ^m} \underbrace{P_l(Z)}_{\text{Legendre-Polynom}}.$$

**SATZ 7.5.** (1)  $Y_{l,m} : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  ist die Einschränkung eines homogenen Polynoms  $(r^l Y_{l,m}(\theta, \varphi))$  vom Grad  $l$  auf  $S^2$ .

(2) Das Polynom ist harmonisch, d.h.  $\Delta_{S^2} Y_{l,m} = -l(l+1)Y_{l,m}$ . Also sind die  $Y_{l,m}$  tatsächlich Kugelfunktionen (vom Grad  $l$ ) im Sinne der vorherigen Definition.

(3) Die  $Y_{l,m}$  ( $m = -l, \dots, +l$ ) bilden eine Basis von  $\mathcal{H}_l$ .

(4) Die  $Y_{l,m}$  sind orthonormal  $\langle Y_{l,m}, Y_{l',m'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ . Insbesondere ist damit  $\{Y_{l,m}\}_{l=0,1,\dots; m=-l,\dots,+l}$  eine ONB von  $L^2(S^2)$ .

*Beweis.*

(1) Wir wollen zeigen:  $r^l Y_{l,m}(\theta, \varphi)$  ist ein Polynom in  $x, y, z$ .

Sei  $m \geq 0$ . Dann gilt:

- $r^m (1 - \cos^2\theta)^{\frac{m}{2}} e^{im\varphi} = (r \sin\theta e^{i\varphi})^m = (x + iy)^m$  (da  $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ ) ist ein Polynom.
- $r^{l-m} \frac{d^{m+1}}{dZ^{m+1}} (Z^2 - 1)^l = r^{l-m} P(Z)$ , wobei  $P(Z)$  ein Polynom in  $Z$  vom Grad  $\leq l - m$  ist, dass gerade (bzw. ungerade) ist falls  $l + m$  gerade (ungerade) ist. Damit ist aber  $r^{l-m} P(Z)$  eine Linearkombination von Ausdrücken der Form

$$(r^2)^p (rZ)^q = (x^2 + y^2 + z^2)^p (z)^q,$$

also insbesondere ein Polynom in  $x, y$  und  $z = rZ$ .

- (2) s. Übung (einsetzen + ausrechnen)  
 (3) Wir haben  $2l + 1$  linear unabhängige Elemente (denn die  $e^{im\varphi}$  sind allein schon linear unabhängig) im  $(2l + 1)$ -dimensionalen Raum  $\mathcal{H}_l$ , also eine Basis.  
 (4) Das Skalarprodukt ist definiert als

$$\langle f, g \rangle_{S^2} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \bar{f}g.$$

Wir substituieren  $Z := \cos \theta$ , also  $\sin \theta d\varphi d\theta = d\varphi dZ$  und berechnen

$$\begin{aligned} \langle Y_{l,m}, Y_{l',m'} \rangle &= (\dots) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m+l} (z^2-1)^l (1-z^2)^{\frac{m'}{2}} \\ &\quad \cdot \left(\frac{d}{dz}\right)^{m'+l'} (z^2-1)^{l'} e^{-im\varphi} e^{im'\varphi} d\varphi dz \\ &= (\dots) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(m'-m)\varphi} d\varphi}_{=0 \text{ falls } m \neq m'} \cdot \underbrace{\int_{-1}^1 (1-z^2)^{\frac{m+m'}{2}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m+l} (z^2-1)^l \cdot \left(\frac{d}{dz}\right)^{m'+l'} (z^2-1)^{l'} dz}_{0 \text{ falls } l \neq l' \text{ (part. int.)}} \\ &= (\dots) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \stackrel{\text{Serie}}{=} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \end{aligned}$$

Hierbei ist  $(\dots)$  jeweils ein konstanter Vorfaktor, der in der Serie berechnet wird. □

### 7.1. Additionstheorem und Multipolentwicklung.

SATZ 7.6 (Additionstheorem der Kugelfunktionen). *Wir betrachten zwei Punkte  $X$  und  $Y$  in  $S^2$ ,*

$$X = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} \sin\theta' \cos\varphi' \\ \sin\theta' \sin\varphi' \\ \cos\theta' \end{pmatrix}$$

Sei  $\cos \mu = X \cdot Y$ , also  $\mu$  der Winkel zwischen  $X$  und  $Y$ . Dann gilt:

$$P_l(x \cdot y) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} \underbrace{Y_{l,m}(\theta, \varphi) \bar{Y}_{l,m}(\theta', \varphi')}_{\text{Projektor auf } \mathcal{H}_l}$$

*Beweis.* : Siehe MMPII, oder eine der kommenden Serien □

Der Satz hat viele Anwendungen in der Physik. Z.B. betrachte man in der Elektrostatik eine Ladungsverteilung (Ladungsdichte)  $\rho$  konzentriert auf einem Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^3$  in der Nähe des Ursprungs 0. Wir sind interessiert an dem von der Ladung erzeugten elektrostatischen Potential an einem Punkt  $x \in \mathbb{R}^3$ , der weit weg ist von  $K$ , in dem Sinne, dass  $|x| > |y| \forall y \in K$ .

Zunächst eine mathematische Vorarbeit: Wir haben in Lemma 5.3 gesehen, dass  $\frac{1}{|x-y|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|y|^l}{|x|^{l+1}} P_l(X \cdot Y)$ , für  $x, y \in \mathbb{R}^3$  mit  $|x| > |y|$  und  $X = \frac{x}{|x|}$ ,  $Y = \frac{y}{|y|}$ . Kombination mit dem Additionssatz ergibt dann die wichtige Formel

$$\frac{1}{|x-y|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \frac{|y|^l}{|x|^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \varphi) \bar{Y}_{l,m}(\theta', \varphi')$$

mit  $\theta, \theta', \varphi, \varphi'$  wie im Satz oben.

Zurück zur Elektrostatik berechnen wir mit dieser Formel das elektrostatische Potential in  $x$  wie folgt:

$$\begin{aligned} U(x) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \varrho(x') \frac{1}{|x-x'|} dx' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \varrho(x') \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\mu) \frac{|x'|^l}{|x|^{l+1}} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \int_K \varrho(x') \sum_{m=-l}^{m=l} \bar{Y}_{l,m}(X') Y_{l,m}(X) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \underbrace{\left( -\frac{1}{\epsilon_0(2l+1)} \int_K \varrho(x') \bar{Y}_{l,m}(X') |x'|^l dx' \right)}_{\text{Konst. abhängig von } \rho \text{ und } l,m} \cdot \frac{Y_{l,m}(X)}{|x|^{l+1}} \end{aligned}$$

wobei  $x = |x|X$  und  $x' = |x'|X'$ ,  $|x| > |x'|$  sowie  $\cos\mu = \frac{x \cdot x'}{|x||x'|}$ . Dies ist eine systematische Entwicklung des Potentials in Multipolpotentialen. Der  $l = 0$ -Term entspricht der Approximation unserer Ladungsverteilung durch eine Punktladung in 0, der  $l = 1$  Term ist ein Dipolpotential, der  $l = 2$  Term ein Quadrupolpotential etc.

## 8. Kugelfunktionen—Originale Version des Kapitels

In Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta, \end{aligned}$$

lautet der Laplace-Operator in drei Dimensionen

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2},$$

wobei der *Laplace-Operator auf der Sphäre* durch die Formel

$$\Delta_{S^2} u = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

gegeben ist. Eine *Kugelfunktion* ist eine auf der Einheitskugel definierte glatte Funktion  $Y(\theta, \varphi)$ , welche ein Eigenvektor zum Laplace-Operator  $\Delta_{S^2}$  ist:

$$(8) \quad \Delta_{S^2} Y = -\lambda Y,$$

Dieses Eigenwertproblem tritt in verschiedenen Anwendungen auf, wenn man die Variablen in Kugelkoordinaten separiert. Zum Beispiel erfüllt das elektrostatische Potential  $u(x)$  im Innere einer leeren Kugel von Radius  $R$  mit vorgegebenem Randwert  $f$  die Laplace-Gleichung  $\Delta u(x) = 0$ ,  $|x| \leq R$ , mit Randbedingung  $u(x) = f(x)$ ,  $|x| = R$ . Sucht man Lösungen der Form  $u(x) = U(r)Y(\theta, \varphi)$ , so folgt  $r^2 U'' + 2rU' = \lambda U$ ,  $\Delta_{S^2} Y = -\lambda Y$ . Die (lineare) Gleichung für  $U$  hat für jedes  $\lambda$  ein zweidimensionales Lösungsraum. Ein Potenzreihenansatz bricht nach dem ersten Term ab und wir finden die allgemeine Lösung ( $\lambda \neq -1/4$ )

$$U(r) = ar^\ell + br^{-\ell-1},$$

wobei  $x = \ell, -\ell - 1$  die Lösungen der quadratischen Gleichung  $x(x+1) = \lambda$  sind (für  $\lambda = -1/4$  ist die allgemeine Lösung  $(a + b \ln r)r^{-1/2}$ ). Wir dürfen annehmen, dass  $\text{Re } \ell \geq -1/2$ . Da  $u$  regulär im Ursprung sein muss, kommen nur die Lösungen mit  $\ell \geq 0$  ganzzahlig und  $b = 0$  in Frage.

Um Lösungen des Eigenwertproblems (8) zu finden, separieren wir nochmals die Variablen, und suchen Eigenfunktionen der Form  $Y(\theta, \varphi) = P(\cos\theta)V(\varphi)$ . Es

ist hier zweckmässig die Variable  $x = \cos \theta \in [-1, 1]$  einzuführen. Da  $\partial/\partial\theta = -\sin \theta \partial/\partial x$ , lässt sich das Eigenwertproblem wie folgt umschreiben:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} P(x) \right] V(\varphi) + \frac{1}{1-x^2} P(x) \frac{d^2 V(\varphi)}{d\varphi^2} = -\lambda P(x) V(\varphi).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $(1-x^2)/(PV)$ , so sind die Variablen separiert. Dann erfüllt  $V$  die Gleichung  $V'' + m^2 V = 0$ , und  $P$  die *Legendre-Differenzialgleichung*

$$(9) \quad \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} P(x) \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P(x) = 0.$$

Die Lösungen der Differenzialgleichung für  $V$  sind Linearkombinationen von  $V(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$  für  $m \neq 0$  und  $V(\varphi) = 1, \varphi$  für  $m = 0$ . Da  $Y(\theta, \varphi)$  stetig auf  $S^2$  sein soll, muss  $m$  eine ganze Zahl sein und die Lösung  $V(\varphi) = \varphi$  ist ausgeschlossen. Für die Anwendung auf der Elektrostatik ist, wie wir gesehen haben,  $\lambda = \ell(\ell+1)$  mit  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ . Man kann aber zeigen, dass für andere Werte von  $\lambda$  alle Lösungen der Legendre-Differenzialgleichung an mindestens einem der singulären Punkten  $x = \pm 1$  divergieren.

Für  $m = 0$ , stimmt die Legendre-Differenzialgleichung mit (7) überein. Reguläre Lösungen sind Legendre-Polynome

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell.$$

Die *zugeordneten (oder assoziierten) Legendre-Funktionen* sind durch die Rodrigues Formel

$$(10) \quad \begin{aligned} P_{\ell,m}(x) &= (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) \\ &= \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^\ell \ell!} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2 - 1)^\ell, \end{aligned}$$

für  $m = 0, 1, \dots, \ell$  definiert (für  $m > \ell$  verschwindet dieser Ausdruck).

SATZ 8.1.

- (i) Die zugeordneten Legendre-Funktionen  $P_{\ell,m}$  erfüllen die Legendresche Differenzialgleichung (9)
- (ii) Für alle  $m = 0, 1, 2, \dots, m \leq \ell, \ell' \in \mathbb{Z}$  gilt

$$(11) \quad \int_{-1}^1 P_{\ell,m}(x) P_{\ell',m}(x) dx = \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell,\ell'}.$$

- (iii) Für alle  $m, N \in \{0, 1, 2, \dots\}$  ist  $((1-x^2)^{-m/2} P_{\ell,m})_{\ell=m, m+1, \dots, m+N}$  eine Basis des Raums der Polynomen vom Grad  $\leq N$ .

*Beweis:* Differenziert man  $m$ -mal die Differenzialgleichung

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_\ell(x) - 2x \frac{d}{dx} P_\ell(x) + \ell(\ell+1) P_\ell(x) = 0.$$

für Legendre-Polynome, so sieht man dass das Polynom vom Grad  $\ell - m$

$$R_{\ell,m}(x) = \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x)$$

die Differenzialgleichung

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} R_{\ell,m}(x) - 2(m+1)x \frac{d}{dx} R_{\ell,m}(x) + (\ell(\ell+1) - m(m+1)) R_{\ell,m}(x) = 0,$$

erfüllt. Daraus folgt nach einer einfachen Rechnung, dass die Funktion  $P_{\ell,m}(x) = (1-x^2)^{m/2} R_{\ell,m}(x)$  die Legendre-Differenzialgleichung erfüllt. Somit ist (i) bewiesen.

Also gilt die Eigenwertgleichung

$$L_m R_{\ell,m}(x) = -\lambda_{\ell,m} R_{\ell,m}(x), \quad \lambda_{\ell,m} = \ell(\ell+1) - m(m+1),$$

wobei der Differenzialoperator  $L_m$  durch die Formel

$$\begin{aligned} L_m f(x) &= (1-x^2) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{df(x)}{dx} \\ &= (1-x^2)^{-m} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^{m+1} \frac{d}{dx} f(x) \right] \end{aligned}$$

gegeben ist. Dieser Operator hat folgende Eigenschaften

- (a)  $L_m$  bildet Polynome nach Polynomen vom gleichen oder kleinerem Grad.
- (b) Sei  $N = 0, 1, \dots$ . Die Einschränkung von  $L_m$  auf dem Vektorraum der Polynomen vom Grad  $\leq N$  ist selbstadjungiert für das Skalarprodukt

$$(f, g)_m = \int_{-1}^1 \overline{f(x)} g(x) (1-x^2)^m dx.$$

Es folgt, dass die Eigenvektoren  $R_{\ell,m}$  zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind:  $(R_{\ell,m}, R_{\ell',m})_m = 0$  für  $\ell \neq \ell'$ .

Um  $N_{\ell,m} := (R_{\ell,m}, R_{\ell,m})_m$  auszurechnen, benützen wir die Eigenwertgleichung um eine Rekursionsformel herzuleiten: für  $m \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} N_{\ell,m} &= \int_{-1}^1 R_{\ell,m}(x)^2 (1-x^2)^m dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{d}{dx} R_{\ell,m-1}(x) \right)^2 (1-x^2)^m dx \\ &= - \int_{-1}^1 R_{\ell,m-1}(x) \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^m \frac{d}{dx} R_{\ell,m-1}(x) \right] dx \\ &= \lambda_{\ell,m-1} \int_{-1}^1 R_{\ell,m-1}(x)^2 (1-x^2)^{m-1} dx. \end{aligned}$$

Die Randterme bei der partiellen Integration verschwinden, da  $(1-x^2)^m = 0$  für  $x = \pm 1$  und  $m \geq 1$ . Mit  $\lambda_{\ell,m-1} = \ell(\ell+1) - (m-1)m = (\ell-m+1)(\ell+m)$  folgt die Rekursionsformel

$$N_{\ell,m} = (\ell-m+1)(\ell+m)N_{\ell,m-1}.$$

mit Anfangsbedingung  $N_{\ell,0} = \int_{-1}^1 P_\ell(x)^2 dx = 2/(2\ell+1)$ . Es folgt

$$N_{\ell,m} = \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{2}{2\ell+1}.$$

Also

$$(R_{\ell,m}, R_{\ell',m})_m = \int_{-1}^1 P_{\ell,m}(x) P_{\ell',m}(x) dx = \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell,\ell'},$$

und (ii) ist bewiesen. (iii) folgt aus der Tatsache, dass  $R_{\ell,m}$  ein Polynom vom Grad  $\ell-m$  ist.  $\square$

Die Funktionen

$$(12) \quad P_{\ell,m}(\cos \theta) e^{\pm im\varphi},$$

mit  $\ell = 0, 1, \dots$ ,  $m = 0, \dots, \ell$  sind also Eigenvektoren von  $\Delta_{S^2}$  zum Eigenwert  $-\ell(\ell+1)$ . Wir normieren sie so, dass sie bezüglich des Skalarproduktes

$$(13) \quad (f, g) = \int_{S^2} \bar{f} g d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \overline{f(\theta, \varphi)} g(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$



orthonormiert sind. Wir setzen für  $m = 0, \dots, \ell$ ,

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

wobei die zugeordneten Legendre-Funktionen durch (10) gegeben sind (der Faktor  $(-1)^m$  ist Konventionssache). Die Eigenfunktionen mit dem negativen Vorzeichen im Exponent in (12) werden bis auf Normierung als  $Y_{\ell,-m}$  mit  $m = 1, \dots, \ell$  definiert:

$$Y_{\ell,-m}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos \theta) e^{-im\varphi}, \quad m = 0, \dots, \ell.$$

Mit dieser Konvention gilt

$$\overline{Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)} = (-1)^m Y_{\ell,-m}(\theta, \varphi),$$

für alle  $m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, \ell\}$ . Die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{S^2} \overline{Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)} Y_{\ell',m'}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

folgt nach Integration über  $\varphi$  und dann, unter Verwendung von (11), über  $x = \cos \theta$ . Sei  $L^2(S^2)$  der Hilbertraum der (bis auf f.ü. verschwindenden Funktionen definierten) Funktionen  $f(\cos \theta, \varphi)$  mit  $\int_{S^2} |f|^2 d\Omega = \int_{[-1,1] \times [0,2\pi]} |f(x, \varphi)|^2 dx d\varphi < \infty$ . Das Skalarprodukt ist (13).

**SATZ 8.2.** *Die Kugelfunktionen  $Y_{\ell,m}$ ,  $\ell = 0, 1, \dots$ ,  $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$  bilden eine orthonormierte Basis des Hilbertraums  $L^2(S^2)$ , die aus Eigenvektoren vom  $\Delta_{S^2}$  besteht.*

*Beweisskizze.* Es bleibt zu zeigen, dass die Kugelfunktionen vollständig sind. Dazu verwendet man, dass stetige Funktionen dicht in  $L^2$  sind. Ist  $f \in L^2(S^2)$  so gibt es eine stetige Funktion  $g$  mit  $\|f - g\|_2$  beliebig klein. Nach der klassischen Theorie der Fourierreihen können wir  $g(x, \varphi)$  durch ein trigonometrisches Polynom  $\sum_{|m| \leq N} g_m(x) e^{im\varphi}$  mit stetigen Koeffizienten  $g_m(x)$  gleichmässig und also auch in  $L^2(S^2)$  beliebig gut approximieren. Wir dürfen wie im Beweis von Satz 3.1 annehmen, dass  $g_m(x)$  in einer kleinen Umgebung von  $x = \pm 1$  verschwindet. Dann ist  $(1-x^2)^{-|m|/2} g_m(x)$  stetig und kann nach Weierstrassgleichmässig durch ein Polynom approximiert werden. Nach Satz 8.1 ist also  $g_m(x)$  eine Linearkombination von  $P_{\ell,|m|}$  mit  $\ell \geq |m|$ . Setzt man all dies zusammen, so sieht man, dass für jedes  $f \in L^2(S^2)$  und zu jedem  $\epsilon > 0$ , Koeffizienten  $c_{\ell,m}$  existieren mit

$$\|f - \sum_{|m| \leq \ell \leq N} c_{\ell,m} Y_{\ell,m}\|_2 < \epsilon.$$

Da aber  $\|f - \sum_{|m| \leq \ell \leq N} (Y_{\ell,m}, f) Y_{\ell,m}\|_2 \leq \|f - \sum_{|m| \leq \ell \leq N} c_{\ell,m} Y_{\ell,m}\|_2$ , ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

BEISPIELE:  $Y_{0,0}(\theta, \varphi) = 1/\sqrt{4\pi}$ ,

$$\begin{aligned} Y_{1,-1}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x - iy}{r} \\ Y_{1,0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \\ Y_{1,1}(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x + iy}{r} \end{aligned}$$

Wir werden später sehen, dass  $r^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ ,  $m = -\ell, \dots, \ell$ , eine Basis des Vektorraums der Polynome

$$u(x, y, z) = \sum_{a+b+c=\ell} u_{a,b,c} x^a y^b z^c,$$

mit komplexen Koeffizienten  $u_{a,b,c}$ , die die Laplace-Gleichung  $\Delta u = 0$  erfüllen. Solche Polynome heissen homogene harmonische Polynome vom Grad  $\ell$ .

Wir betrachten jetzt einige Anwendungen, wobei wir auf rigorosen Beweisen der Korrektheit der hergeleiteten Lösungen verzichten.

**8.1. Elektrostatik im Inneren einer leeren Kugel.** Der oben diskutierte Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad |x| \leq R, \\ u(x) &= f(x), & |x| = R, \end{aligned}$$

mit vorgegebener Randbedingung  $f = f(\theta, \varphi)$ , führt nach Separation der Variablen auf die Formel

$$u(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell,m} r^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \varphi).$$

Die Koeffizienten werden durch die Randbedingung festgelegt. Setzt man  $r = R$  ein und verwendet man, dass Kugelfunktionen eine ortonormierte Basis bilden, erhält man

$$c_{\ell,m} = R^{-\ell} \int \overline{Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)} f(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta d\varphi.$$

Eine alternative Lösung dieses Problems führt auf eine Integralformel für die Lösung (Poissonformel, s.u.).

**8.2. Strömung um eine Kugel.** Die stationäre Geschwindigkeitsverteilung  $\vec{v}(x) \in \mathbb{R}^3$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  einer inkompressiblen Flüssigkeit, die um einer Kugel von Radius  $R$  in der positiven  $z$ -Richtung mit Geschwindigkeit  $v_0$  fließt, erfüllt  $\vec{v}(x) = \text{grad } u(x)$  wobei  $u$  Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & |x| \geq R, \\ x \cdot \text{grad } u(x) &= 0, & |x| = R, \\ u(x) &\sim v_0 x_3, & |x| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ist. Die zweite Bedingung bedeutet, dass die Geschwindigkeit der Flüssigkeit tangential zur Kugeloberfläche ist. Die dritte Bedingung ist die Forderung, dass die Geschwindigkeit weit weg vom Hindernis gegen den konstanten Vektor  $(0, 0, v_0)$  konvergieren soll.

Die Separation der Variablen führt auf den Ansatz

$$u = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (a_{\ell,m} r^\ell + b_{\ell,m} r^{-\ell-1}) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi).$$

Die Randbedingung auf der Kugeloberfläche lautet  $\partial u / \partial r = 0$  für  $r = R$ . Also, wenn wir das Skalarprodukt mit  $Y_{\ell,m}$  nehmen,

$$\ell a_{\ell,m} R^{\ell-1} - (\ell+1) b_{\ell,m} R^{-\ell-2} = 0.$$

Insbesondere  $b_{0,0} = 0$ . Da aber  $u$  linear für  $r \rightarrow \infty$  wachsen soll, muss  $a_{\ell,m}$  und also auch  $b_{\ell,m}$  für  $\ell \geq 2$  verschwinden. Da  $u$  nur bis auf einer additiven Konstanten definiert ist, dürfen wir  $a_{0,0} = 0$  setzen. Also  $b_{1,m} = R^3 a_{1,m} / 2$  und

$$u = \sum_{m=-1}^1 a_{1,m} (1 + (R/r)^3 / 2) r Y_{1,m}(\theta, \varphi).$$

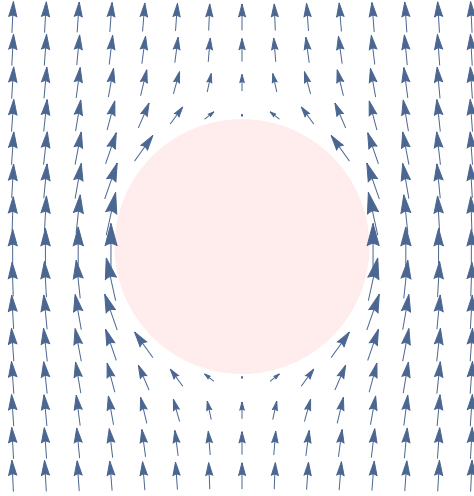


ABBILDUNG 3. Das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(x_1, 0, x_3)$

Da  $rY_{1,\pm 1}$  zu  $x_1 \pm ix_2$  und  $Y_{1,0}$  zu  $x_3$  proportional ist, müssen  $a_{1,\pm 1}$  verschwinden, und wir erhalten

$$u(x) = v_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{|x|} \right)^3 \right) x_3.$$

Die Geschwindigkeitsverteilung  $\vec{v}(x)$  ist dann

$$\vec{v}(x) = (0, 0, v_0) - \frac{v_0 R^3}{2|x|^5} (3x_1x_3, 3x_2x_3, 2x_3^2 - x_1^2 - x_2^2).$$

In Abb. 3 ist das Geschwindigkeitsfeld in der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene mit dem *Mathematica*-Befehl `VectorPlot` dargestellt.

## Distributionen (verallgemeinerte Funktionen)

### 1. Motivation

Das elektrostatische Potential  $u$ , das von einer Ladungsdichte  $\rho$  erzeugt wird, ist eine Lösung der Poisson-Gleichung

$$(14) \quad \Delta u(x) = -4\pi\rho(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Die totale Ladung ist  $Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) dx$ . Eine Punktladung  $e$  im Ursprung wird nach Dirac mit einer "Funktion"

$$\rho(x) = e\delta(x)$$

beschrieben, wobei  $\delta(x) = 0$  für  $x \neq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(x) dx = 1$ . Eine Lösung von (14) ist dann das Coulomb-Potential

$$u(x) = \frac{e}{|x|}.$$

Tatsächlich ist  $\Delta \frac{e}{|x|} = 0$  für  $x \neq 0$  (nachrechnen) und für alle  $R > 0$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \frac{e}{|x|} dx &= \int_{|x| \leq R} \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{e}{|x|} dx \\ &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{|x|=R} \operatorname{grad} \frac{e}{|x|} \cdot n d\Omega(x) \\ &= - \int_{|x|=R} \sum_i \frac{ex_i}{|x|^3} \cdot \frac{x_i}{|x|} d\Omega(x) \\ &= - \frac{e}{R^2} \int_{|x|=R} d\Omega(x) = - \frac{e}{R^2} 4\pi R^2 \\ &= -4\pi e, \end{aligned}$$

obei  $n = \frac{x}{|x|}$  der nach aussen weisende Normalvektor der Länge 1 ist.

Die obigen formalen Rechnungen bekommen eine Bedeutung im Rahmen der Theorie der Distributionen von Laurent Schwartz.

### 2. Temperierte Distributionen

DEFINITION 2.1. Eine *temperierte Distribution* ist eine stetige lineare Abbildung

$$\omega : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \omega[\varphi].$$

Mit anderen Worten erfüllt  $\omega$  die Eigenschaften:

- (i)  $\omega[\lambda\varphi + \mu\psi] = \lambda\omega[\varphi] + \mu\omega[\psi]$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .
- (ii)  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \omega[\varphi_n] \rightarrow \omega[\varphi]$ .

Der Raum der temperierten Distributionen wird mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.

BEMERKUNG 2.1. (ii) kann durch die schwächere Bedingung (ii')  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \Rightarrow \omega[\varphi_n] \rightarrow 0$  ersetzt werden, denn  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \iff \varphi_n - \varphi \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ .

BEISPIEL 2.1.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  kann als Unterraum von  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  aufgefasst werden. Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Wir definieren eine Distribution  $\omega_f$  ("f als Distribution aufgefasst"), durch

$$f[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Die Linearität von  $\omega_f$  ist offensichtlich.

Stetigkeit: sei  $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Insbesondere strebt die Folge  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi_j(x)|$  gegen 0 ( $j \rightarrow \infty$ ) und ist somit beschränkt. Also  $|f(x)\varphi_j(x)| \leq \text{const} |f| \in L^1$ . Wir können also den Lebesgueschen Konvergenzsatz anwenden:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int f(x)\varphi_j(x)dx = \int f(x) \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j(x)dx = 0,$$

also  $\omega_f[\varphi_j] \rightarrow 0$ .

Ist  $f_1 \neq f_2$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , so ist auch  $\omega_{f_1} \neq \omega_{f_2}$ , denn für  $\varphi = \bar{f}_1 - \bar{f}_2$  gilt

$$\omega_{f_1}[\varphi] - \omega_{f_2}[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} (f_1(x) - f_2(x))\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx > 0.$$

BEISPIEL 2.2. Allgemeiner: sei  $f$  so, dass  $f(x)(1 + |x|^2)^{-N} \in L^1$  für ein hinreichend grosses  $N$ . Dann kann man  $\omega_f$  wie im Beispiel 2.1 definieren (Übung).

BEISPIEL 2.3. Dirac'sche  $\delta$ -Funktion

$$\delta[\varphi] = \varphi(0), \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Stetigkeit: sei  $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi_j \rightarrow 0$ . Dann konvergiert  $\varphi_j$  gleichmässig gegen 0, und insbesondere  $\varphi_j(0) \rightarrow 0$ . Also  $\delta[\varphi_j] \rightarrow 0$ .

BEMERKUNG 2.2. Distributionen der Form  $\omega_f$  mit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  heissen *reguläre* Distributionen.

BEMERKUNG 2.3. Wir betrachten hier *temperierte* Distributionen. Distributionen (ohne das Wort temperiert) sind Elemente des Dualraumes von  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , d.h. stetige lineare Abbildungen von  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  nach  $\mathbb{C}$ . Eine Linearform  $\omega$  auf  $C_0(\mathbb{R}^n)$  heisst stetig wenn  $\omega[\varphi_j] \rightarrow \omega[\varphi]$  für alle Folgen  $\varphi_j$  die Träger in einer gemeinsamen beschränkten Menge  $X \subset \mathbb{R}^n$  haben, und so dass  $\|\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi\|_\infty \rightarrow 0$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

**Notation.** Ist  $f$  eine Funktion wie in den Beispielen oben, so schreiben wir oft einfach  $f$  statt  $\omega_f$ . Dies bedeutet, dass wenn von  $f$  als Distribution die Rede ist, ist die Distribution  $\varphi \mapsto f[\varphi] := \int f(x)\varphi(x) dx$  gemeint.

### 3. Operationen auf Distributionen

Wir betrachten folgende lineare Abbildungen von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  nach  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

a) Translationen

$$(T_a f)(x) = f(x - a), \quad a \in \mathbb{R}^n.$$

b) Lineare Variablentransformationen

$$(U_A f)(x) = f(A^{-1}x), \quad A \in GL_n(\mathbb{R}).$$

c) Multiplikation mit einer Funktion  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(gf)(x) = g(x)f(x).$$

d) Ableitung  $f \mapsto \partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$ .

e) Fouriertransformation  $f \mapsto \hat{f}$ .

f) Faltung mit einer Funktion  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$   $f \mapsto g * f$ .

Diese Abbildungen sind *stetig* (Übung und Satz 5.6). Wir wollen diese Operationen auf Distributionen definieren. Dazu untersuchen wir wie sie auf reguläre Distributionen wirken.

**a) Translationen.** Seien  $f, \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann

$$\begin{aligned}(T_a f)[\varphi] &= \int_{\mathbb{R}^n} (T_a f)(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-a) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x+a) dx = f[T_{-a} \varphi].\end{aligned}$$

Dies motiviert die Definition für  $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$(T_a \omega)[\varphi] = \omega[T_{-a} \varphi].$$

$T_a \omega$  ist als Zusammensetzung von  $T_{-a}$  und  $\omega$  stetig, also in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**b) Lineare Koordinatentransformationen.** Seien  $f, \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann

$$(U_A f)[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} f(A^{-1}x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(Ay) |\det A| dy = f[U_{A^{-1}} \varphi] |\det A|.$$

DEFINITION 3.1.  $(U_A \omega)[\varphi] := |\det A| \omega[U_{A^{-1}} \varphi]$  für beliebiges  $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**c) Multiplikation mit einer Funktion.** Seien  $g, f, \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann

$$(gf)[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) \varphi(x) dx = f[g\varphi].$$

DEFINITION 3.2. Seien  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann  $(g\omega)[\varphi] := \omega[g\varphi]$ .

Allgemeiner kann man hier für  $g$  auch  $C^\infty$ -Funktionen zulassen, sofern die Funktion und alle Ableitungen höchstens polynomial wachsen, so dass  $g\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Insbesondere ist dies der Fall, falls  $g$  selbst ein Polynom ist.

**d) Ableitung.** Seien  $f, \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Mit partieller Integration erhalten wir

$$(\partial^\alpha f)[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f(x)) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} f[\partial^\alpha \varphi].$$

DEFINITION 3.3.  $(\partial^\alpha \omega)[\varphi] := (-1)^{|\alpha|} \omega[\partial^\alpha \varphi]$  für alle  $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  („Ableitung im Distributionssinn“).

BEISPIEL 3.1.  $n = 1$ . Die Heaviside-Funktion

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

ist nicht differenzierbar (nicht einmal stetig). Wir berechnen ihre Ableitung im Distributionssinn.  $\theta$  definiert die Distribution

$$\varphi \mapsto \theta[\varphi] = \int_{\mathbb{R}} \theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^\infty \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Die Ableitung ist die Distribution

$$\left(\frac{d}{dx} \theta\right) [\varphi] = -\theta \left(\frac{d}{dx} \varphi\right) = -\int_0^\infty \frac{d}{dx} \varphi(x) dx = \varphi(0) = \delta[\varphi].$$

Also ist

LEMMA 3.1.  $\frac{d}{dx} \theta = \delta$ .

BEISPIEL 3.2. Verschobene  $\delta$ -Funktion. Sei  $a \in \mathbb{R}^n$ . Wir definieren

$$\delta_a[\varphi] := (T_a \delta)[\varphi] = \varphi(a).$$

BEISPIEL 3.3. Lineare Variablensubstitution bei der  $\delta$ -Funktion.  
Sei  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . Dann gilt:

$$(U_A \delta)[\varphi] = \delta[U_{A^{-1}} \varphi] |\det A| = \varphi(0) |\det A|.$$

Folglich gilt

LEMMA 3.2.  $U_A \delta = |\det A| \delta$  für alle  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ .

In der Notation der Physiker und der Physikerinnen lautet dieses Resultat

$$" \delta(A^{-1}x) = |\det A| \delta(x) "$$

BEISPIEL 3.4. Ableitungen der  $\delta$ -Funktion ( $\alpha \in \mathbb{N}^n$ )

$$(\partial^\alpha \delta)[\varphi] = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \varphi)(0).$$

e) **Fouriertransformation.** Für  $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\hat{f}[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{\varphi} dx = f[\hat{\varphi}]$$

und  $\check{f}[\varphi] = f[\check{\varphi}]$ .

DEFINITION 3.4.  $\hat{\omega}[\varphi] := \omega[\hat{\varphi}]$ ,  $\check{\omega}[\varphi] := \omega[\check{\varphi}]$  für alle  $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

SATZ 3.3. Die Fouriertransformation und die inverse Fouriertransformation sind bijektive lineare Abbildungen

$$\wedge, \vee : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

und für alle  $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\omega^{\wedge\vee} = \omega^{\vee\wedge} = \omega$ .

*Beweis.* Linearität ist klar. Für beliebige  $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  haben wir nach Satz 4.1.

$$\begin{aligned} \omega^{\wedge\vee}[\varphi] &= \omega^\wedge[\varphi^\vee] = \omega[\varphi^{\vee\wedge}] = \omega[\varphi], \\ \omega^{\vee\wedge}[\varphi] &= \omega^\vee[\varphi^\wedge] = \omega[\varphi^{\wedge\vee}] = \omega[\varphi]. \quad \square \end{aligned}$$

*Beispiel.* Fouriertransformation der Funktion 1 auf  $\mathbb{R}^n$  (im Distributionssinn)

$$\begin{aligned} 1[\varphi] &= \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx, \\ \hat{1}[\varphi] &= 1[\hat{\varphi}] = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) dk = (2\pi)^n \varphi^{\wedge\vee}(0) = (2\pi)^n \varphi(0). \end{aligned}$$

Resultat:

LEMMA 3.4.  $\hat{1} = (2\pi)^n \delta$ .

In der Notation der Physik:  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} dx = (2\pi)^n \delta(k)$ .

f) **Faltung.** Seien  $g, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (g * f)[\varphi] &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) dy \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) \varphi(x) dx \right) dy \\ &= f[\tilde{g} * \varphi], \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{g}(x) = g(-x)$ . Definiere also für  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$(g * \omega)[\varphi] := \omega[\tilde{g} * \varphi] \quad \text{und analog} \quad (\omega * g)[\varphi] := \omega[\tilde{g} * \varphi].$$

LEMMA 3.5. Für alle  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$g * \delta = g$$

(im Distributionssinn).

Beweis. Sei  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(g * \delta)[\varphi] = \delta[\tilde{g} * \varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(0 - y)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\varphi(y)dy = g[\varphi].$$

□

LEMMA 3.6. Seien  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$

- (i)  $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * \partial^\alpha g$
- (ii)  $\partial^\alpha(\omega * g) = (\partial^\alpha \omega) * g = \omega * \partial^\alpha g = \partial^\alpha(g * \omega)$

Beweis. (i) Da  $f * g = g * f$  genügt es, die erste Gleichung zu beweisen. Nach Induktion, genügt es, sie für erste Ableitungen zu verifizieren:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x - y)g(y)dy,$$

nach dem Mittelwertsatz und dem Satz von Lebesgue.

(ii) wird auf (i) zurückgeführt:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(\omega * g)[\varphi] &= \partial^\alpha \omega[\varphi * \tilde{g}] = (-1)^{|\alpha|} \omega[\partial^\alpha(\varphi * \tilde{g})] = (-1)^{|\alpha|} \omega[(\partial^\alpha \varphi) * \tilde{g}] \\ &= (-1)^{|\alpha|} (\omega * g)[\partial^\alpha \varphi]. \end{aligned}$$

□

#### 4. Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Wir statten den Raum der temperierten Distributionen  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  mit einer Topologie aus, der schwachen \*-Topologie. Konkret ist  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ein lokalkonvexer Raum mit der Familie von Halbnormen  $\{\|\omega\|_\varphi\}_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ , mit

$$\|\omega\|_\varphi := |\omega[\varphi]|,$$

wobei  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  über Schwartzraumfunktionen läuft. Insbesondere konvergiert eine Folge  $(\omega_j)_{j=1}^\infty$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  gegen  $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , falls für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\omega_j[\varphi] \rightarrow \omega[\varphi] \quad (j \rightarrow \infty).$$

Wir schreiben dann  $\omega = \mathcal{S}'\text{-lim}_{j \rightarrow \infty} \omega_j$ .

BEMERKUNG 4.1. Allgemein definiert man für einen topologischen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  den Dualraum  $V^*$  als den Raum der stetigen linearen Abbildungen  $V \rightarrow \mathbb{C}$ . Auf  $V^*$  existieren verschiedene Topologien. Die schwache \*-Topologie (oder ultraschwache Topologie) ist allgemein die lokalkonvexe Topologie, die durch die Familie von Halbnormen  $\|f\|_v := |f(v)|$ , mit  $v \in V$ , erzeugt wird.

Sei nun  $F : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Sei  $F^* : V^* \rightarrow V^*$  die duale (transponierte) Abbildung, definiert auf  $f \in V^*$  durch (s. die Lineare Algebra Vorlesung)

$$(F^* f)(v) := f(F(v)).$$

Dann ist  $F^*$  automatisch schwach-\*-stetig, denn

$$\|F^* f\|_v = |(F^* f)(v)| = |f(F(v))| = \|f\|_{F(v)} \leq \|f\|_{F(v)}.$$

Die oben definierten Operationen auf Distributionen sind alle transponierte Abbildungen, und daher stetig.

Insbesondere folgt z.B. aus  $\omega = \mathcal{S}'\text{-lim}_{j \rightarrow \infty} \omega_j$  für beliebiges  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\hat{\omega}_j[\varphi] = \omega_j[\hat{\varphi}] \rightarrow \omega[\hat{\varphi}] = \hat{\omega}[\varphi],$$

also  $\hat{\omega} = \mathcal{S}'\text{-lim}_{j \rightarrow \infty} \hat{\omega}_j$ .



Approximierte  $\delta$ -Funktionen:

SATZ 4.1. Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$ , und sei

$$f_j(x) = f(jx)j^n, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Dann konvergiert die Folge  $f_j$  (als Folge von Distributionen) gegen  $\delta$ .

Ist zum Beispiel  $f(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ , so ist es intuitiv plausibel, dass die Folge der  $f_j$  gegen die  $\delta$ -Funktion konvergiert. Satz 4.1 gilt allerdings auch für beliebige  $L^1$ -Funktionen mit Integral 1.

*Beweis.* Für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} f_j[\varphi] &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(jx)j^n \varphi(x) dx \stackrel{y=jx}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(y/j) dy \\ &\stackrel{\text{Lebesgue}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(0) dy = \varphi(0). \end{aligned}$$

Man darf den Satz von Lebesgue anwenden, weil  $|f(y)\varphi(y/j)| \leq |f(y)|\|\varphi\|_{0,0} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

BEISPIEL 4.1. Regularisierung von Polen. Eine Funktion mit einem Pol auf der reellen Achse, wie  $f(x) = 1/x$  kann nicht direkt als Distribution aufgefasst werden, da sie nicht integrierbar in der Umgebung der Singularität. Der *Hauptwert*  $P(1/x) = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \chi_{|x| \geq \epsilon}$  ist definiert durch<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{x}\right)[\varphi] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Dies definiert eine Distribution in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , da nach dem Mittelwertsatz,

$$\begin{aligned} \left| P\left(\frac{1}{x}\right)[\varphi] \right| &\leq \int_0^1 2 \sup\{|\varphi'(y)|, y \in [-1, 1]\} \\ &\quad + \int_1^{\infty} 2 \sup\{|y|\varphi(y)|, y \in \mathbb{R}\} dx / |x|^2 \leq c \|\varphi\|_{1,1}. \end{aligned}$$

Andere regularisierte Versionen von  $1/x$  sind  $1/(x \pm i0) = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 1/(x \pm i\epsilon)$ , d.h.

$$\frac{1}{x \pm i0}[\varphi] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x \pm i\epsilon} \varphi(x) dx.$$

Dies definiert eine Distribution, als Folge der bemerkenswerten Formel:

SATZ 4.2.

$$\frac{1}{x \pm i0} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta$$

*Beweis.* Wir zerlegen  $1/(x \pm i\epsilon)$  in Real- und Imaginärteil.

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

Wir haben dann mit dem Satz von Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx.$$

<sup>1</sup>Wir schreiben  $y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\epsilon)$  wenn  $y = \lim_{j \rightarrow \infty} f(\epsilon_j)$  für alle Folgen  $(\epsilon_j)$  positiver Zahlen die gegen Null konvergieren.

Ferner gilt nach der Variablensubstitution  $x = \epsilon y$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y^2 + 1} \varphi(\epsilon y) dy \rightarrow \pi \varphi(0).$$

## 5. Fundamentallösungen für den Laplace-Operator

Wir betrachten die Poissongleichung in  $n \geq 2$  Dimensionen

$$(15) \quad \Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Funktion  $f$  ist vorgegeben, und es wird eine Funktion  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  gesucht mit  $u(x) \rightarrow 0$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ . Als erster Schritt wird eine Lösung von (15) *im Distributions-sinn* gesucht, d.h. eine Distribution  $u$  mit  $\Delta u = f$ . Es soll also für alle  $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  die Gleichung

$$(\Delta u)[\varphi] = f[\varphi],$$

d.h.

$$u[\Delta \varphi] = f[\varphi]$$

gelten.

DEFINITION 5.1. Eine *Fundamentallösung* für einen Differenzialoperator

$$L = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq N}} a_\alpha \partial^\alpha$$

mit konstanten Koeffizienten  $a_\alpha$  ist eine Distribution  $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , die die Gleichung

$$LE = \delta$$

erfüllt.

In unserem Falle  $\Delta E = \delta$ . Ist  $E$  eine Fundamentallösung für  $\Delta$  und  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , so ist

$$u = E * f$$

eine Lösung von (15) im Distributionssinn, denn

$$\Delta(E * f) = \Delta E * f = \delta * f = f.$$

Wir suchen also eine Lösung von  $\Delta E = \delta$ . Ansatz:  $E(x) = \psi(|x|)$ , wobei  $\psi$  für  $r \neq 0$  eine  $C^2$ -Funktion von  $r = |x|$  ist. Für  $r \neq 0$  erwarten wir, dass  $\Delta \psi = 0$ , also

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi(r) = 0.$$

Eine Lösung ist

$$\psi(r) = \begin{cases} c_n r^{-n+2} & n > 2, \\ c_2 \ln r & n = 2. \end{cases}$$

Die Konstanten  $c_n$  sind noch zu bestimmen. Wir zeigen jetzt, dass  $E(x) = \psi(|x|)$  eine Distribution definiert. Sei  $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} |E[\varphi]| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x|) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(|x|)| \frac{1}{(1+|x|^2)^m} (1+|x|^2)^m |\varphi(x)| dx \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |(1+|y|^2)^m \varphi(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(|x|)| \frac{1}{(1+|x|^2)^m} dx \end{aligned}$$

Für  $m \geq 2$  ist  $\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(|x|)| (1+|x|^2)^{-m} dx \propto \int_0^\infty |\psi(r)| (1+r^2)^{-m} r^{n-1} dr < \infty$ , also ist  $|E[\varphi]| \leq \text{const} \|\varphi\|_{2m,0}$ , und  $E$  ist somit stetig. Also  $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

LEMMA 5.1. (Greensche Identität) Sei  $D$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  mit glattem Rand  $\partial D$  und nach aussen weisendem Einheitsvektoren  $n(x)$ ,  $x \in \partial D$ . Für alle  $u, v \in C^2(D \cup \partial D)$  gilt dann

$$\int_D (\Delta uv - u\Delta v) dx = \int_{\partial D} \left( \frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\Omega(x),$$

wobei  $\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i=1}^n n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  die Ableitung in normaler Richtung bezeichnet, und  $d\Omega(x)$  das Oberflächenmass auf  $\partial D$  ist.

*Beweis.* Nach dem Gausschen Divergenzsatz haben wir

$$\begin{aligned} \int_D (\Delta uv - u\Delta v) dx &= \sum_{i=1}^n \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} v - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\partial D} n_i(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} v - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\Omega(x). \end{aligned}$$

□

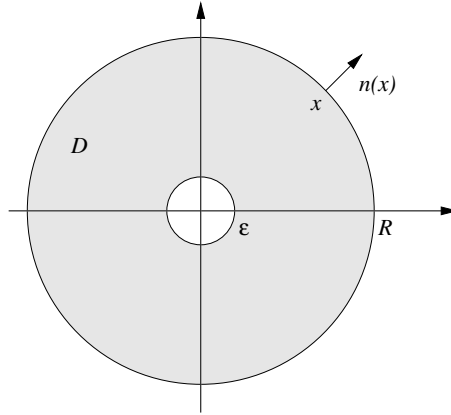
Rechnung:

$$E[\Delta\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x|) \Delta\varphi(x) dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0, R \uparrow \infty} \int_{\epsilon < |x| < R} \psi(|x|) \Delta\varphi(x) dx.$$

Wir benützen die Greensche Identität für  $D = \{x \in \mathbb{R}^n | \epsilon < |x| < r\}$ ,  $n_i(x) = \pm \frac{x_i}{|x|}$ , und verwenden, dass  $\Delta\psi = 0$  auf  $D$ .

$$E[\Delta\varphi] = \lim_{\epsilon \downarrow 0, R \uparrow \infty} \int_{\partial D} \left( \psi(|x|) \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial\psi(|x|)}{\partial n} \varphi \right) d\Omega(x).$$

Der Limes  $R \rightarrow \infty$  kann ausgeführt werden. Da  $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}$  und  $\varphi(x)$  schneller als jedes Polynom gegen 0 streben für  $|x| \rightarrow \infty$ , hat man keinen Beitrag von der Komponente



$\{|x| = R\}$  von  $\partial D$ . Also

$$E[\Delta\varphi] = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left( \int_{|x|=\epsilon} \psi(|x|) \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\Omega(x) - \int_{|x|=\epsilon} \frac{\partial\psi}{\partial n} (|x|) \varphi(x) d\Omega(x) \right).$$

Im ersten Term schätzen wir  $|\frac{\partial\varphi}{\partial n}|$  durch  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum |\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|$  ab

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|=\epsilon} \psi(|x|) \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\Omega(x) \right| &= \left| \psi(\epsilon) \int_{|x|=\epsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\Omega(x) \right| \leq |\psi(\epsilon)| \|\varphi\|_{0,1} \text{const } \epsilon^{n-1} \\ &= \begin{cases} \text{const } \|\varphi\|_{0,1} c_n \epsilon & n > 2 \\ \text{const } \|\varphi\|_{0,1} c_2 \epsilon \ln \epsilon & n = 2 \end{cases} \\ &\xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Im zweiten Term rechnen wir

$$\frac{\partial \psi(|x|)}{\partial n} = - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(|x|) = -\psi'(|x|) = -\tilde{c}_n |x|^{-n+1},$$

wobei  $\tilde{c}_n = c_n(2-n)$  für  $n \geq 3$  und  $\tilde{c}_2 = c_2$ . Wir können jetzt den Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  ausführen.

$$\begin{aligned} E[\Delta \varphi] &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \psi'(\epsilon) \int_{|x|=\epsilon} \varphi(x) d\Omega(x) \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \psi'(\epsilon) \int_{|x|=\epsilon} (\varphi(0) + O(\epsilon)) d\Omega(x) \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \psi'(\epsilon) |S^{n-1}| \epsilon^{n-1} (\varphi(0) + O(\epsilon)) \\ &= \tilde{c}_n |S^{n-1}| \varphi(0). \end{aligned}$$

Die Distribution  $E$  ist also eine Fundamentallösung, falls  $\tilde{c}_n |S^{n-1}| = 1$ . Da  $|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$  hat man das Resultat:

SATZ 5.2. Sei  $n \geq 2$ . Die Funktion

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(2-n)} |x|^{-n+2}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2, \end{cases}$$

ist Fundamentallösung für den  $n$ -dimensionalen Laplace-Operator, d.h. sie erfüllt (als Distribution) die Gleichung

$$\Delta E = \delta.$$

BEISPIEL 5.1.  $n = 3$ :  $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$ ,  $n = 4$ :  $E(x) = -\frac{1}{4\pi^2|x|^2}$ .

BEMERKUNG 5.1. In diesen Beispielen ist die Fundamentallösung eine glatte Funktion ausser im Punkt 0, wo  $\delta$  "singulär" ist. Man kann zeigen (S. z. B. Taylor), dass dies ein allgemeines Phänomen ist, das unter dem Namen "Elliptische Regularität" bekannt ist. Eine Distribution  $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  heisst *glatt* auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$ , falls es eine glatte Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, mit  $\omega[\varphi] = \int f(x)\varphi(x)dx$  für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  die ausserhalb  $U$  verschwinden. Zum Beispiel sind  $\delta$  und  $E$  glatt auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Ein Differenzialoperator  $\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha$  der Ordnung  $N$  heisst *elliptisch* wenn  $\sum_{|\alpha|=N} a_\alpha p^\alpha \neq 0$  für alle  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Zum Beispiel ist  $\Delta$  elliptisch da  $|p|^2 \neq 0$  für  $p \neq 0$ , nicht aber der Wellenoperator  $\square = c^{-2}\partial_t^2 - \Delta$ .

Sei  $L$  ein elliptischer Differenzialoperator und  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  glatt auf  $U$ . Die elliptische Regularität besagt dann, dass jede Lösung  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  von  $Lu = f$  ebenfalls glatt auf  $U$  ist.

Dabei ist die Annahme, dass  $L$  elliptisch ist, wesentlich: wir werden sehen, dass die Fundamentallösungen des Wellenoperators singulär auf einem *Kegel* sind.

## 6. Fundamentallösungen und Fouriertransformationen

Sei  $L = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha$  ein Differenzialoperator der Ordnung  $N$  mit konstanten Koeffizienten  $a_\alpha \in \mathbb{R}$ . Da die konstante Funktion 1 (als Distribution aufgefasst) die Fouriertransformierte der Dirac  $\delta$ -Distribution ist, können wir die Gleichung  $LE = \delta$  für Fundamentallösungen  $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  als eine algebraische Gleichung für die Fouriertransformierten  $\hat{E}$  umschreiben:

$$(16) \quad P(k) \hat{E}(k) = 1.$$

wobei  $P(k) = \sum_{\alpha} a_\alpha (ik)^\alpha$  ein Polynom in  $k_1, \dots, k_n$  ist. Die Gleichung (16) muss im Sinne der Distributionen verstanden werden: die linke Seite ist als Multiplikation

der polynomial beschränkten Funktion  $P$  mit der Distribution  $\hat{E}$  aufzufassen: also bedeutet (16) nach Definition  $\hat{E}[P\varphi] = 1[\varphi] = \int \varphi(x)dx$  für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Hat  $P(k)$  keine reelle Nullstelle, so definiert  $1/P(k)$  eine Distribution und wir haben eine Lösung  $\hat{E}(k) = 1/P(k)$  oder  $E = (1/P(k))^\vee$ . Allgemeiner definiert diese Formel eine Fundamentallösung wenn  $1/P(k)$  integrierbare Singularitäten hat.

BEISPIEL 6.1. Sei  $n = 1$  und  $L = -\frac{d^2}{dx^2} + \mu^2$ ,  $\mu > 0$ . Dann ist  $P(k) = k^2 + \mu^2$ , und  $E = (1/(k^2 + \mu^2))^\vee$ . Da  $k \mapsto 1/(k^2 + \mu^2)$  in  $L^1(\mathbb{R})$  ist, können wir (nach Fubini) die inverse Fouriertransformierte dieser Distribution mit der üblichen Formel ausrechnen:  $E[\varphi] = \int E(x)\varphi(x)dx$ , mit

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k^2 + \mu^2} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\mu} e^{-\mu|x|}.$$

BEISPIEL 6.2. (Coulomb-Potential) Sei  $n = 3$ ,  $L = -\Delta$ . Dann ist  $P(k) = |k|^2$ . Die Singularität von  $1/P(k) = |k|^{-2}$  bei  $k = 0$  ist integrierbar in 3 (oder mehr) Dimensionen. Also ist  $E = (|k|^{-2})^\vee$  definiert in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ . Allerdings ist  $k \mapsto |k|^{-2}$  nicht in  $L^1$ , da diese Funktion nicht rasch genug abfällt wenn  $k \rightarrow \infty$ . Die inverse Fouriertransformierte muss also als Distribution ausgerechnet werden. Mit dem Trick des Konvergenzerzeugenden Faktors kann aber die Rechnung auf Fouriertransformationen von Funktionen zurückgeführt werden:  $E[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^3} |k|^{-2} \hat{\varphi}(k) dk = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^3} |k|^{-2} e^{-\epsilon|k|} \hat{\varphi}(k) dk$ . Solange  $\epsilon > 0$  können wir die Reihenfolge der Integrationen vertauschen und bekommen  $E[\varphi] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^3} E_\epsilon(x) \varphi(x) dx$  mit

$$\begin{aligned} E_\epsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\epsilon|k|+ik \cdot x}}{|k|^2} dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\epsilon\kappa+i\kappa|x|\cos\theta}}{\kappa^2} \kappa^2 d\kappa \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\pi e^{-\epsilon\kappa+i\kappa|x|\cos\theta} d\kappa \sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \frac{1}{\epsilon - i|x|\cos\theta} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\epsilon - i|x|u} du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 \frac{\epsilon + i|x|u}{\epsilon^2 + (u|x|)^2} du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2|x|} 2 \arctan \frac{|x|}{\epsilon} \\ &\rightarrow \frac{1}{4\pi|x|}, \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Hat aber  $1/P(k)$  nicht integrierbare Singularitäten, so kann man immer noch durch Regularisierung Fundamentallösungen manchmal finden. Dies machen wir im nächsten Abschnitt für die Wellengleichung.

## 7. Retardierte Fundamentallösung für den d'Alembert-Operator

Wir suchen Lösungen  $u$  der inhomogenen Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f,$$

mit  $f$  vorgegeben, in drei Raumdimensionen. Diese Gleichung beschreibt zum Beispiel die Ausbreitung von durch eine Antenne emittierten elektromagnetischen Wellen. Mit  $x_0 = ct$ , suchen wir dazu eine Fundamentallösung  $E$  für den d'Alembert-Operator

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Die Fouriertransformierte von  $E$  erfüllt dann (als Distribution)

$$(17) \quad (-k_0^2 + |\mathbf{k}|^2) \hat{E}(k) = 1, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$$

Eine Lösung ist  $\hat{E}(k) = (-k_0 - i0)^2 + |\mathbf{k}|^2)^{-1}$ . Der Leser und die Leserin sollen verifizieren, dass diese Formel eine Distribution definiert, die (17) erfüllt. Diese Wahl der Regularisierung der Pole bei  $k_0 = \pm|\mathbf{k}|$  führt auf die *retardierten* Fundamentallösung, s.u.. Wir berechnen jetzt die inverse Fouriertransformierte  $E$  im Sinne der Distributionen. Um die Rechnung auf Fouriertransformationen von Funktionen zurückzuführen, benützen wir einen konvergenzerzeugenden Faktor.

$$\begin{aligned} E[\varphi] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{-(k_0 - i\epsilon)^2 + |\mathbf{k}|^2} \check{\varphi}(k) dk \\ &= \lim_{\epsilon, \epsilon' \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{e^{-\epsilon'|\mathbf{k}|^2}}{-(k_0 - i\epsilon)^2 + |\mathbf{k}|^2} \check{\varphi}(k) dk. \end{aligned}$$

Nach Vertauschung des Integrals mit dem Fourierintegral hat man also

$$E[\varphi] = \lim_{\epsilon, \epsilon' \rightarrow 0^+} \int E_{\epsilon, \epsilon'}(x) \varphi(x) dx,$$

mit

$$E_{\epsilon, \epsilon'}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{e^{-\epsilon'|\mathbf{k}|^2 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + ik_0 x_0}}{-(k_0 - i\epsilon)^2 + |\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} dk_0,$$

mit der Notation  $x = (x_0, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Die Integration über  $k_0$  kann mit dem Residuensatz ausgewertet werden. Für  $x_0 > 0$  schliesst man den Integrationsweg in der oberen Halbebene und erhält die Summe der Residuen (mal  $2\pi i$ ) an den beiden Pole  $k_0 = \pm|\mathbf{k}| + i\epsilon$ . Für  $x_0 < 0$  muss der Integrationsweg in der unteren Halbebene geschlossen werden und sie umschließt keine Pole. Also hat man

$$E_{\epsilon, \epsilon'}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(2\pi)^4} 2\pi i \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\epsilon'|\mathbf{k}|^2 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \epsilon x_0} \frac{e^{i|\mathbf{k}|x_0} - e^{-i|\mathbf{k}|x_0}}{2|\mathbf{k}|} d\mathbf{k}, & x_0 > 0, \\ 0, & x_0 < 0. \end{cases}$$

Für  $x_0 > 0$  verwenden wir Kugelkoordinaten, um das Integral zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} E_{\epsilon, \epsilon'}(x) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon' \kappa^2 - \epsilon x_0} (e^{i\kappa(x_0 - |\mathbf{x}|)} - e^{i\kappa(x_0 + |\mathbf{x}|)}) d\kappa \\ &= \frac{e^{-\epsilon x_0}}{4\pi|\mathbf{x}|} (\delta_{\epsilon'}(x_0 - |\mathbf{x}|) - \delta_{\epsilon'}(x_0 + |\mathbf{x}|)), \quad (x_0 > 0), \end{aligned}$$

mit  $\delta_{\epsilon'}(y) = (4\pi\epsilon')^{-1/2} \exp(-y^2/4\epsilon') = \delta_1(y/\sqrt{\epsilon'})/\sqrt{\epsilon'}$ , einer approximierten  $\delta$ -Funktion. Wie können jetzt den Limes  $\epsilon, \epsilon' \rightarrow 0^+$  ausführen: für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ ,

$$E[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \varphi(|\mathbf{x}|, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Der zweite Term trägt nicht bei, da  $\delta_{\epsilon'}(x_0 + |\mathbf{x}|) \rightarrow 0$  wenn  $x_0 > 0$ . Es folgt, dass eine Lösung von  $Lu = f$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  ist  $u = E * f$ . Explizit (Übung),

$$(18) \quad u(x_0, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f(x_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

Die allgemeine Lösung erhält man indem man eine allgemeine Lösung der Wellengleichung dieser Lösung addiert. Diese spezielle Lösung hat die Eigenschaft, dass  $u(x_0, \mathbf{x})$  verschwindet für  $x_0 \ll 0$ , wenn  $f$  kompakten Träger hat. Zudem hängt die Lösung zur Zeit  $t = x_0/c$  von den Werten von  $f$  zu *früheren* Zeiten (die Radiosendung empfängt man erst nach der Emission der Signale durch die Antenne). Die *avancierte* Fundamentallösung mit  $+i0$  statt  $-i0$  hätte zu einer Lösung geführt, in der die Lösung von den Werten von  $f$  in der Zukunft abhängt. Man bemerke, dass  $u(x_0, \mathbf{x})$  proportional dem elektrostatischen Potential ist, das von einer Ladungsdichte erzeugt wird. Deren Wert in  $x'$  ist  $f$  zur früheren Zeit  $(x_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)/c$ . Die Zeitdifferenz ist die Zeit die es braucht mit Lichtgeschwindigkeit von  $\mathbf{x}'$  nach  $\mathbf{x}$  zu gelangen.

BEMERKUNG 7.1. Malgrange und Ehrenpreis haben um 1955 bewiesen, dass jeder Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten eine Fundamentallösung besitzt.

## Dirichletproblem, harmonische Funktionen

### 1. Dirichlet und Neumannrandbedingungen

Die Laplacegleichung für die Funktion  $u \in C^2(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  lautet

$$\Delta u(x) = 0 \quad x \in D.$$

Lösungen der Laplacegleichung heißen *harmonische Funktionen*. Sei  $D$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  (d.h. eine nichtleere zusammenhängende offene Menge) mit glattem Rand  $\partial D$ . Typische Randwertprobleme sind das *Dirichletproblem*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in D \\ u(x) = f(x) & x \in \partial D \end{cases} \quad (\text{D})$$

und das *Neumannproblem*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x) & x \in \partial D \end{cases} \quad (\text{N})$$

Die Funktionen  $f$  und  $g$  sind vorgegebene Randbedingungen, und gesucht wird  $u \in C^2(D)$ , die (D) oder (N) erfüllt. In der Elektrostatik erfüllt das elektrische Potential in einem neutralen Medium die Laplacegleichung. Die Randbedingung (D) hat man wenn der Wert des Potentials am Rand vorgeschrieben wird, (N) falls die Ladungsdichte auf der Oberfläche gegeben ist. Wir beweisen zuerst einen Eindeutigkeitsatz.

**SATZ 1.1.** *Seien  $u_1, u_2$  zwei Lösungen von (D). Dann ist  $u_1 = u_2$ . Seien  $u_1, u_2$  zwei Lösungen von (N). Dann ist  $u_1 = u_2 + \text{const}$ .*

*Beweis.* Sei  $u = u_1 - u_2$ . Dann ist  $\Delta u = 0$  und  $u(x) = 0$  (bzw.  $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0$ ) für  $x \in \partial D$ . Nach dem Gaussischen Divergenzatz hat man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_D \sum_i (u_{x_i})^2 dx = \int_D \left[ \sum_i (u u_{x_i})_{x_i} - u \Delta u \right] dx \\ &= \int_{\partial D} u(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\Omega(x). \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck verschwindet, und es folgt dass  $u$  konstant ist. Im Falle (D) ist die Konstante 0, denn  $u(x) = 0$  auf  $\partial D$ .  $\square$

### 2. Greensche Funktionen

Im Kapitel über Distributionen haben wir die Fundamentallösung

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n(2-n)} |x|^{2-n}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2 \end{cases}$$

eingeführt. Hier ist  $\omega_n = |S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ . Sie erfüllt die Gleichung  $\Delta E = \delta$ , d.h.

$$\int E(x-y) \Delta u(y) dy = u(x)$$



für alle  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

LEMMA 2.1. Sei  $u \in C^2(\bar{D})$ . Dann gilt für  $x \in D$

$$u(x) = \int_D E(x-y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial D} \left[ E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) \right] d\Omega(y).$$

*Beweis.* Der Beweis ist parallel zum Beweis von Satz 5.2. Die Randterme werden aber berücksichtigt. Nach der Green'sche Identität gilt mit  $B_\epsilon(x) = \{y \in D \mid |y-x| \leq \epsilon\}$

$$\begin{aligned} \int_D E(x-y) \Delta u(y) dy &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{D \setminus B_\epsilon(x)} E(x-y) \Delta u(y) dy \\ &= u(x) + \int_{\partial D} \left( E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} \right) d\Omega(y). \end{aligned}$$

Der erste Term ergibt sich aus der Integration über  $\partial B_\epsilon(x)$  und wird genau wie im Satz 5.2 ausgewertet.  $\square$

Der Existenzsatz für (D) und (N) gilt, soll aber hier nicht im Allgemeinen behandelt werden.

DEFINITION 2.1. Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen mit glattem Rand. Eine stetige Funktion  $G(x, y)$  auf  $\{(x, y) \in \bar{D} \times D \mid x \neq y\}$  heisst *Greensche Funktion* des Gebiets  $D$  (für den Laplace-Operator) falls

- (i)  $G(x, y) = E(x-y) + v(x, y)$ , mit  $v \in C^2(\bar{D} \times D)$  und  $\Delta_x v(x, y) = 0$ .
- (ii)  $G(x, y) = 0$ ,  $x \in \partial D$ ,  $y \in D$ .

Insbesondere ist für  $x \neq y$   $\Delta_x G(x, y) = 0$ . Wir schreiben  $\Delta_x$  für den Laplace-Operator  $\sum \partial^2 / \partial x_i^2$  in den Variablen  $x$ .

BEMERKUNG 2.1. Die Greensche Funktion liefert eine Lösung des inhomogenen Problems  $\Delta u(x) = f(x)$ ,  $x \in D$ ,  $u(x) = 0$ ,  $x \in \partial D$  mit vorgegebenem  $f$  mit kompaktem Träger in  $D$ . Es gilt nämlich für  $u(x) = \int_D G(x, y) f(y) dy$ ,

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \Delta \int E(x-y) f(y) dy + \int \Delta_x v(x, y) f(y) dy \\ &= f(x) + 0, \end{aligned}$$

Falls  $f$  in einer Umgebung des Randes verschwindet, folgt aus  $G(x, y) = 0$ ,  $x \in \partial D$ , dass  $u(x) = 0$ ,  $x \in \partial D$ .

BEMERKUNG 2.2. Die Greensche Funktion ist eindeutig. Die Differenz zweier Greenschen Funktionen auf  $D$  ist nämlich, als Funktion des ersten Argumentes  $x$ , eine Lösung des Dirichlet Problems (D) mit Randbedingung 0, also, nach Satz 1.1, identisch null.

SATZ 2.2. Falls  $u$  eine Lösung von (D) ist, hat man für alle  $x \in D$

$$u(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n_y}(y, x) f(y) d\Omega(y).$$

*Beweis.* Nach Lemma 2.1 haben wir, für  $u$  harmonisch,

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[ -E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) + u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) \right] d\Omega(y).$$

Andererseits gilt nach der Green-Identität,

$$0 = \int_{\partial D} \left[ v(y, x) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} v(y, x) \right] d\Omega(y).$$

Die Behauptung folgt durch Subtraktion, unter Verwendung von  $E(x-y) = E(y-x)$ .  $\square$

Die Formel in Satz 2.2 liefert also die Lösung als Funktion der Dirichlet Randbedingungen.

### 3. Methode der Spiegelbildung, Poissonformel

Die Greensche Funktion der Kugel wird durch die Methode der "Spiegelbildung" konstruiert. Sei  $D = B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$ . Für  $y \in D$  sei

$$y^* = \frac{R^2}{|y|^2} y.$$

Die Abbildung  $y \mapsto y^*$  heisst Spiegelung um die Sphäre vom Radius  $R$  (Abb. 3).

Es ist leicht, folgende Eigenschaften zu verifizieren.

- (i)  $y^{**} = y$ .
- (ii)  $|y^*| = R^2/|y|$ .
- (iii)  $|y| \cdot |x - y^*| = |x| \cdot |y - x^*|$ .

Die letzte Eigenschaft folgt der Tatsache, dass beide Dreiecke in der Abbildung 3, die einen gemeinsamen Winkel in 0 haben, wegen  $|x| \cdot |x^*| = |y| \cdot |y^*|$  *ähnlich* sind.

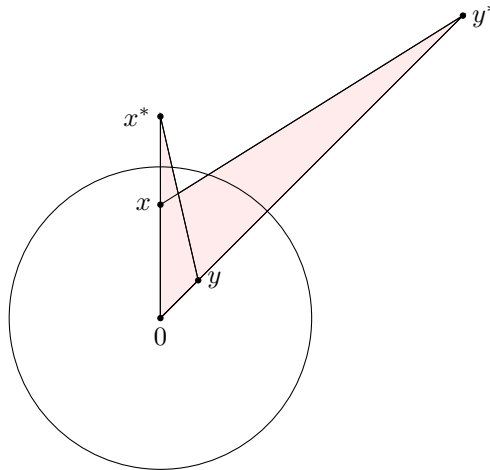


ABBILDUNG 1. Geometrischer Beweis von (iii): Die Dreiecke  $0xy^*$  und  $0yx^*$  sind ähnlich.

Für  $n \geq 3$  ist also

$$\begin{aligned} G(x, y) &= E(x - y) - \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n} E(x - y^*) \\ &= \frac{1}{\omega_n(2-n)} \left( |x - y|^{2-n} - \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n} |x - y^*|^{2-n} \right) \end{aligned}$$

die gesuchte Greensche Funktion, denn  $\Delta_x E(x - y^*) = 0$  für alle  $x \in D$  ( $y^* \notin D!$ ) und  $G(x, y) = 0$  für  $x \in \partial D$ . Für  $n = 2$  ist die Greensche Funktion

$$\begin{aligned} G(x, y) &= E(x - y) - E(x - y^*) - \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{|y|}{R} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \ln |x - y| - \ln \left( |x - y^*| \frac{|y|}{R} \right) \right). \end{aligned}$$

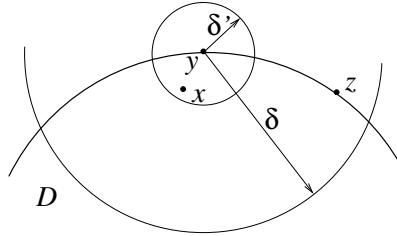


ABBILDUNG 2. Bild zur Abschätzung von  $|u(x) - f(y)|$

Aus der Eigenschaft (iii) der Spiegelung folgt, dass  $g(x, y) = G(y, x)$ . Der in Satz 2.2 auftretende Kern ist dann

$$H(y, x) = \frac{\partial}{\partial n_y} G(y, x) = \frac{1}{\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \quad (n \geq 2)$$

SATZ 3.1. (Poisson-Formel) Sei  $D$  die Kugel  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$  und  $f$  stetig auf  $\partial D$ . Die Funktion

$$u(x) = \int_{|y|=R} H(y, x) f(y) d\Omega(y), \quad x \in D$$

ist glatt auf  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$ , harmonisch und konvergiert gegen  $f$  wenn  $|x| \rightarrow R$ .

*Beweis.* Die Funktion  $H(y, x)$  ist  $C^\infty$  als Funktion von  $x \in D$  mit  $y \in \partial D$ , und alle Ableitungen nach  $x$  sind stetig in  $y \in \partial D$ . Also darf unter dem Integral abgeleitet werden, und  $u$  ist glatt. Da  $G(x, y) = G(y, x)$ , wie aus der expliziten Formel und der Identität  $|y||x - y^*| = |x||y - x^*|$  ersichtlich ist, ist  $G(y, x)$  und daher  $H(y, x)$  harmonisch als Funktion von  $x$ . Daraus folgt dass  $u$  harmonisch ist. Es bleibt zu zeigen, dass  $u(x) \rightarrow f(y)$  falls  $x \rightarrow y$  und  $y \in \partial D$ . Da die Funktion 1 harmonisch ist und den Randwert 1 hat, gilt nach Satz 2.2

$$(19) \quad 1 = \int_{|y|=R} H(y, x) d\Omega(y).$$

Also hat man für  $|x| < R$ ,  $|y| = R$

$$u(x) - f(y) = \int_{|z|=R} H(z, x) (f(z) - f(y)) d\Omega(z).$$

Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $f$  stetig ist, existiert ein  $\delta = \delta(\epsilon)$  so dass  $|f(z) - f(y)| < \epsilon/2$  für  $|z - y| < \delta$ , siehe Abb. 2. Wir zerlegen

$$u(x) - f(y) = \int_{\substack{|z|=R \\ |z-y| < \delta}} + \int_{\substack{|z|=R \\ |z-y| > \delta}} = I_1 + I_2.$$

Da  $H(z, x) > 0$  gilt nach (19)

$$|I_1| < \frac{\epsilon}{2} \int_{|z|=R} H(z, x) d\Omega(z) = \frac{\epsilon}{2}.$$

Sei  $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$ . Wir haben die Abschätzung

$$|I_2| \leq 2M \int_{\substack{|z|=R \\ |z-y| > \delta}} \frac{1}{\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|z - x|^n} d\Omega(z).$$

Sei  $|y-x| < \delta' < \delta$ . Wir schätzen  $|z-x|$  und  $R^2 - |x|^2$  mit der Dreiecksungleichung: für  $|z-y| > \delta$  gilt

$$|z-x| \geq |z-y| - |y-x| \geq \delta - \delta'$$

und da  $|y| = R$ ,  $R^2 - |x|^2 = (|y| - |x|)(R + |x|) \leq |y-x|(R + |x|) \leq \delta'2R$ . Somit gilt

$$|I_2| \leq \frac{2M}{\omega_n R} \int_{|z|=R} d\Omega(z) \frac{2R\delta'}{(\delta - \delta')^n} = 4M\delta'R^{n-1} \frac{1}{(\delta - \delta')^n}.$$

Für  $\delta'$  klein genug, ist  $|I_2| < \epsilon/2$ . Es folgt  $|u(x) - f(y)| < \epsilon$  für  $|x-y| < \delta'$ .  $\square$

Als Anwendung beweisen wir einige bemerkenswerte Eigenschaften von harmonischen Funktionen. Sie sind Verallgemeinerungen von aus der Funktionentheorie bekannten Eigenschaften von harmonischen Funktionen in  $n = 2$  Dimensionen. In diesem Fall sind (reellwertige) harmonische Funktionen  $u(x_1, x_2)$  Realteile von holomorphen Funktionen von  $x_1 + ix_2$ . Für  $n = 1$  sind harmonische Funktionen Lösungen der gewöhnlichen Differenzialgleichung  $u''(x) = 0$  also affine Funktionen  $u(x) = ax + b$ .

Wir bezeichnen mit  $B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| \leq R\}$  die Kugel von Radius  $R$  und Mittelpunkt  $x$  und mit  $S_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| = R\}$  die Kugeloberfläche. Ihr Flächeninhalt ist

$$|S_R(x)| = \omega_n R^{n-1}, \quad \omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

**SATZ 3.2. (Mittelwertprinzip)** Sei  $u$  harmonisch auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Für jede Kugel  $B_R(x) \subset D$  gilt:

$$u(x) = \frac{1}{|S_R(x)|} \int_{S_R(x)} u(y) d\Omega(y).$$

*Beweis.* Da, für jedes  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(x)$  genau dann harmonisch ist, wenn  $u(x+a)$  harmonisch ist, dürfen wir annehmen dass  $x = 0$ . Die Behauptung folgt dann aus

$$H(y, 0) = \frac{1}{\omega_n R} \frac{R^2}{|y|^n} = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}, \quad \text{für } |y| = R.$$

$\square$

Eine nicht leere offene Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heisst *Gebiet* [domain] falls sie zusammenhängend ist, also wenn  $D$  keine Teilmengen ausser  $D$  und  $\emptyset$  hat, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. In diesem Fall ist zusammenhängend [connected] gleichbedeutend wie pfadzusammenhängend [path connected]: zu je zwei Punkten  $x, y$  in  $D$  gibt es eine stetige Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ .

**SATZ 3.3. (Maximum-Prinzip)** Ist  $u$  harmonisch auf einem Gebiet  $D$ , und sei  $x_0 \in D$  eine Maximalstelle:  $u(x) \leq u(x_0)$  für alle  $x \in D$ . Dann ist  $u$  konstant.

*Beweis.* Da  $D$  offen ist, gibt es eine Kugel  $B_R(x_0) \subset D$ . Sei  $M = u(x_0)$ . Nach dem Mittelwertprinzip ist  $M$  der Mittelwert von  $u(x) \leq M$  auf  $S_r(x_0)$  für  $r \leq R$ . Das ist nur möglich wenn  $u(x) = M$  auf  $B_R(x_0)$ . Also ist  $U = u^{-1}(M) = \{x \in D \mid u(x) = M\}$  offen und nichtleer, da jeder Punkt von  $U$  als  $x_0$  gewählt werden kann. Andererseits ist diese Menge als Urbild der abgeschlossen Menge  $\{M\}$  durch die stetige Funktion  $u$  abgeschlossen. Es folgt, dass  $U = D$ , also  $u(x) = M$  für alle  $x \in D$ .  $\square$

Da  $u$  genau dann harmonisch ist, wenn  $-u$  harmonisch ist, gilt auch das Minimum-Prinzip: Nicht konstante harmonische Funktionen auf offenen zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  haben weder Minima noch Maxima. Es folgt ein stärkerer Eindeutigkeitssatz für das Dirichlet-Problem, das keine Annahme über den Rand braucht:

KOROLLAR 3.4. Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Sei  $u$  eine stetige Funktion auf dem Abschluss  $\bar{D}$ , die harmonisch auf  $D$  ist und so dass  $u(x) = 0$  auf dem Rand  $\partial D = \bar{D} \setminus D$ . Dann ist  $u(x) = 0$  für alle  $x \in \bar{D}$ .

*Beweis.* Da  $\bar{D}$  kompakt ist, nimmt  $u$  ein Maximum und ein Minimum an. Sind die Extrema auf dem Rand angenommen, so ist  $0 \leq u(x) \leq 0$  also  $u = 0$ . Sonst ist nach dem Maximum-Prinzip  $u$  konstant. Da  $u$  auf dem Rand verschwindet, ist  $u = 0$ .  $\square$

SATZ 3.5. Sei  $u$  harmonisch in  $B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| \leq R\}$ . Dann ist

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leq \frac{n}{R} \max_{|y-x|=R} |u(y)|.$$

*Beweis.* o.E.d.A.  $x = 0$ . Für  $|y| = R$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x=0} H(y, x) = -\frac{n}{\omega_n R} \frac{R^2}{|y|^{n+2}} y_i = \frac{n}{\omega_n R^{n+1}} y_i.$$

Die Poissonsche Formel gibt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(0) = \left| \frac{n}{\omega_n R^{n+1}} \int_{|y|=R} y_i u(y) d\Omega(y) \right| \leq \frac{n}{R} \max_{|y|=R} |u(y)|.$$

$\square$

KOROLLAR 3.6. (Satz von Liouville) Jede auf ganz  $\mathbb{R}^n$  beschränkte harmonische Funktion ist konstant.

*Beweis.* Sei  $M = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)|$ . Da  $u$  in jeder Kugel harmonisch ist, folgt

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \right| \leq \frac{n}{R} M$$

für alle  $R > 0$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . Also  $\frac{\partial u}{\partial y_i}(y) = 0$ .  $\square$

KOROLLAR 3.7. (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat eine komplexe Nullstelle.

*Beweis.* Nehmen wir an, ein Polynom  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$  vom Grad  $n$  habe keine Nullstellen. Dann ist  $f(z) = 1/P(z)$  eine holomorphe Funktion auf der komplexen Ebene. Somit sind Real- und Imaginärteil von  $f$  harmonisch. Für  $|z| \rightarrow \infty$  ist  $P(z) = a_n z^n (1 + O(1/z))$  mit  $a_n \neq 0$ , also ist  $f(z)$  beschränkt. Nach Korollar 3.6 ist dann  $f$  und somit auch  $P$  konstant.  $\square$

## Das Wasserstoffatom

### 1. Crashkurs Quantenmechanik

In der klassischen Mechanik wird der momentane Zustand eines physikalischen System beschrieben durch einen Punkt im *Phasenraum*  $X$ . Als Beispiel soll uns ein einzelnes (Punkt-)Teilchen im  $\mathbb{R}^3$  dienen. In diesem Fall ist  $X = \mathbb{R}^{3+3}$ , und ein Punkt  $\xi = (x, p)$  in diesem Raum beschreibt den momentanen Ort  $x$  und den Impuls  $p$  des Teilchens. Physikalische Observablen (Messgrößen) sind Funktionen

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}$$

auf dem Phasenraum. Ist das System im Zustand  $\xi \in X$ , so ist der Messwert im Experiment einfach  $F(\xi)$ . Die Zeitevolution wird durch eine Hamiltonfunktion  $H : X \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmt, die normalerweise der totalen Energie entspricht. Bewegt sich unser Teilchen im  $\mathbb{R}^3$  beispielsweise in einem Potential  $U(x)$  und hat Masse  $M$ , so ist  $H$  gerade die kinetische plus die potentielle Energie

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x).$$

Die Funktion  $H$  erzeugt die Zeitevolution mittels der Hamiltonschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \stackrel{\text{hier}}{=} \frac{p_j}{m} \\ \dot{p}_j(t) &= \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \stackrel{\text{hier}}{=} -\frac{\partial U}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

In der Quantenmechanik wird der momentane Zustand eines Systems beschrieben durch einen Einheitsvektor  $\Psi \in \mathcal{H}$  (also  $\langle \Psi, \Psi \rangle = 1$ ) in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . In unserem Beispiel (Teilchen im  $\mathbb{R}^3$ ) ist dieser Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , und  $\Psi = \Psi(x)$  heisst die Wellenfunktion des Teilchens. Observablen sind selbstadjungierte Operatoren auf diesem Hilbertraum. Beispiele von Observablen sind der Ortsoperator

$$\begin{aligned} X_j &: D \subset L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3) \\ (X_j f)(x) &= x_j f(x) \end{aligned}$$

und der Impulsoperator

$$\begin{aligned} P_j &: \tilde{D} \subset L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3) \\ (P_j f)(x) &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x). \end{aligned}$$

Man beachte, dass beide Operatoren unbeschränkt und nur auf einem dichten Teilraum von  $L^2(\mathbb{R}^3)$  definiert sind. Das Ergebnis einer Messung (mit Observable  $F$ ) des Systems im Zustand  $\Psi$  ist nicht eindeutig bestimmt, sondern folgt einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, die durch  $\Psi$  und  $F$  bestimmt ist. Genauer ist die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert im Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  zu erhalten gegeben durch den Ausdruck

$$\langle \Psi, P_{[a,b]}^F \Psi \rangle,$$

wobei  $P_{[a,b]}^F$  der zum Intervall gehörige Spektralprojektor ist. (Der Begriff Spektralprojektor soll hier nicht erklärt werden. Ist aber beispielsweise  $a = b$ , so ist dies gerade der orthogonale Projektor auf den Eigenraum zum Eigenwert  $a$ .)

Die Zeitevolution ist wieder gegeben durch eine Observable  $H$ , den Hamiltonschen Operator, vermittels der Differentialgleichung (Schrödingergleichung)

$$i\hbar\dot{\Psi}(t) = H\Psi(t).$$

Wir lassen hier die Schwierigkeit ausser Acht, dass  $\Psi$  möglicherweise nicht im Definitionsbereich von  $H$  liegen könnte. (Um dies zu umgehen verwendet man das Theorem von Stone.) Als Übung prüfe man nach, dass  $\langle\Psi(t), \Psi(t)\rangle$  zeitlich konstant ist.

Man erhält normalerweise den quantenmechanischen Hamiltonoperator aus dem klassischen einfach durch die Ersetzung  $x_j \rightarrow X_j$  und  $p_j \rightarrow P_j$ . In unserem Beispiel erhalten wir also

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(X),$$

und damit die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\dot{\Psi}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x, t) + U(x)\Psi(x, t).$$

Der Separationsansatz  $\Psi(x, t) = \Psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$  überführt dies in die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$E\Psi = H\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x) + U(x)\Psi(x).$$

Dies ist ein Eigenwertproblem für  $H$ , mit zu findendem Eigenwert  $E$ , der interpretiert werden kann als Energie.

## 2. Wasserstoffatom

Wir betrachten nun ein Elektron mit Ladung  $-e$  im von einem Proton (Ladung  $+e$ ) erzeugten Coulombpotential. Wir nehmen das Proton als ortsfest im Ursprung an, da es viel schwerer als das Elektron ist. (Für eine bessere Begründung verweisen wir auf die physikalischen Vorlesungen.) Wir vernachlässigen zudem den Spin des Elektrons. Unsere Schrödingergleichung oben spezialisiert dann auf folgende Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|x|}\Psi(x) = E\Psi(x),$$

die wir im Folgenden lösen wollen. Aufgrund der Rotationssymmetrie wählen wir den folgenden Ansatz in Kugelkoordinaten

$$\Psi(r, \theta, \phi) = U(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion  $U(r)$ . Wir nutzen nun die Form des Laplace Operators in Kugelkoordinaten  $\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}$  und die Tatsache  $\Delta_{S^2}Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}$  und erhalten nach einsetzen in die Gleichung

$$0 = -\frac{\hbar^2}{2m}(U'' + \frac{2}{r}U' - \frac{l(l+1)}{r^2}U) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}U - EU$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $U$ , die wir nun lösen wollen. Wir setzen zunächst  $V(r) = rU(r)$ . Einsetzen und einfache Umformung überführt die Gleichung in

$$V'' + \left( \frac{1}{r} - \frac{e^2 2m}{\hbar^2 4\pi\epsilon_0} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) V = 0$$

Wir interessieren uns hier nur für gebundene Zustände, das heisst  $E < 0$ . Wir setzen  $\kappa = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ ,  $\rho = \kappa r$  und  $\rho_0 = \frac{e^2 2m}{\hbar^2 4\pi\epsilon_0 \kappa}$ . Wir setzen ferner  $V(r) = v(\rho) = v(\kappa r)$  in die Gleichung ein und erhalten neu:

$$(20) \quad v'' + \left( \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - 1 \right) v = 0.$$

Bevor wir diese Gleichung lösen ein Einschub:

### 3. Laguerre Polynome

Die Laguerre Polynome  $L_n$  sind die orthogonalen Polynome zum Intervall  $I = [0, \infty)$  und Gewichtsfunktion  $e^{-x}$ . Sie sind eindeutig bestimmt durch die Forderungen:

- $L_n(x)$  ist ein (reelles) Polynom vom Grad  $n$ .
- Es gilt

$$\langle L_m, L_n \rangle = \int_0^\infty L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = \delta_{m,n}.$$

LEMMA 3.1 (Rodrigues Formel).

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) = \frac{1}{n!} \left( \frac{d}{dx} - 1 \right)^n x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^k}{k!}.$$

*Beweis.* Sei o.B.d.A.  $n \geq m$ . Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \langle L_m, L_n \rangle &= \int_0^\infty \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \frac{1}{m!} \left( \frac{d}{dx} - 1 \right)^m x^m dx \\ &\stackrel{P.I.}{=} (-1)^n \int_0^\infty \frac{1}{m! n!} (e^{-x} x^n) \underbrace{\frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{d}{dx} - 1 \right)^m x^m}_{= 0 \text{ falls } n > m \text{ und } = (-1)^m n! \text{ falls } n = m} dx \\ &= \delta_{n,m} \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

□

**Verallgemeinerte Laguerre Polynome.** Allgemeiner definieren wir für  $\alpha > -1$  die verallgemeinerten Laguerre Polynome  $L_n^\alpha$  als die orthogonalen Polynome zu den Daten  $I = [0, \infty)$  und Gewichtsfunktion  $x^\alpha e^{-x}$ . Sie sind bestimmt durch die Eigenschaften

- $L_n^\alpha(x)$  ist ein Polynom vom Grad  $n$ .
- Es gilt

$$\langle L_m^\alpha, L_n^\alpha \rangle = \int_0^\infty L_m^\alpha(x) L_n^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx = \delta_{m,n} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}$$

Diese Polynome haben ausserdem die folgenden Eigenschaften (s. Serie):

- Rodrigues Formel:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) = \frac{1}{n!} \left( \frac{d}{dx} - 1 \right)^n x^{n+\alpha} = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$$

- Sie erfüllen die Laguerresche Differentialgleichung

$$(21) \quad x(L_n^\alpha)'' + (\alpha + 1 - x)(L_n^\alpha)' + nL_n^\alpha = 0$$



#### 4. Lösung des Wasserstoffatoms

Die Laguerresche Differentialgleichung ist schon fast gleich unserer zu lösenden Gleichung (20). Wir müssen nur noch ersetzen  $x = 2\rho$  und  $W(x) = w(\frac{x}{2})$  bzw.  $w(\rho) = W(2\rho)$  und erhalten nach einsetzen und einfacher Umformung

$$xW'' + (2(l+1) - x)W' + (\frac{1}{2}\rho_0 - (l+1))W = 0.$$

Vergleich mit der Laguerreschen Differentialgleichung (21) zeigt uns, dass, falls  $n' := \frac{1}{2}\rho_0 - (l+1) \in \mathbb{N}_0$ , dann ist  $W(x) = CL_{n'}^{2l+1}$  (mit  $C$  konstant) eine Lösung der Gleichung. Man beachte, dass die Gleichung als ODE zweiter Ordnung für alle  $n'$  einen zweidimensionalen Lösungsraum hat. Wir werden im nächsten Abschnitt aber zeigen, dass alle anderen Lösungen nicht auf normierbare physikalische Lösungen der Schrödingergleichung führen. Wir wollen dies im Moment annehmen. Man beachte, dass insbesondere die Bedingung  $n' \in \mathbb{N}_0$  die Energieniveaus quantisiert!

Lösen wir die Formel für  $n'$  wieder nach  $\rho_0$  auf, so erhalten wir

$$\rho_0 = 2n' + 2(l+1) = 2 \underbrace{(n' + l + 1)}_{=: n} = 2n.$$

Lösen wir weiter auf für  $E$  erhalten wir die Energieniveaus des Wasserstoffatoms

$$E_{n,l,m} = -\frac{me^4}{32\epsilon_0^2\hbar^2\pi^2} \frac{1}{n^2}.$$

Hierbei sind die Quantenzahlen  $n = 1, 2, \dots$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$  und  $m = -l, \dots, l$  erlaubt. Die zugehörige Wellenfunktion ist (mit Normierungsfaktor, den wir hier nicht berechnen wollen, und  $a := \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \approx 0.5 \times 10^{-10}m$ )

$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = \sqrt{\left(\frac{2}{an}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n((n+l)!)^3}} e^{-\frac{r}{an}} \left(\frac{2r}{an}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{an}\right) Y_{lm}(\theta, \phi).$$

#### 5. Lösungen der Laguerreschen Differentialgleichung

Wir wollen nun die Laguerresche Differentialgleichung

$$xf'' + (1 + \alpha - x)f' + \lambda f = 0$$

allgemein lösen. Konkret suchen wir für jedes  $\lambda$  zwei linear unabhängige Lösungen. Wir schränken uns ein auf den fürs Wasserstoffatom relevanten Fall, dass  $\alpha > 0$  ein Integer ist (bei uns  $\alpha = 2l+1$ ) und  $\lambda > 0$ . Unser Ziel ist zu zeigen, dass nur die oben gefundenen Lösungen auf physikalische Lösungen der Schrödingergleichung führen.

Wir verwenden die Frobenius Methode, die hier einfach der Potenzreihenansatz

$$f(x) = \sum_{k=-r}^{\infty} f_k x^k$$

ist, mit zu bestimmenden Konstanten  $r$  und  $f_k$ , mit  $f_{-r} = 1$ . (Allgemein muss man zulassen, dass  $r$  kein Integer ist, in unserem Fall wird aber  $r$  als Integer herauskommen.) Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$0 = \sum_{k=-r-1}^{\infty} f_{k+1}(k+1)(k+1+\alpha)x^k - \sum_{k=-r}^{\infty} f_k(k-\lambda)x^k.$$

Koeffizientenvergleich ergibt also die Gleichungen

$$(22) \quad (-r)(-r+\alpha)f_{-r} = 0 \quad \text{Koeff. von } x^{-r-1}$$

$$(23) \quad (k+1)(k+1+\alpha)f_{k+1} = (k-\lambda)f_k \quad \text{Koeff. von } x^k, k \geq -r$$

Da  $f_{-r} = 1$  muss insbesondere gelten  $r = 0$  oder  $r = \alpha$ . Wir betrachten beide Fälle separat.

**Fall 1** ( $r = 0$ ): In diesem Fall ist immer  $(k+1)(k+1+\alpha) \neq 0$ . Damit ist aus obiger Rekursionsgleichung  $f_{k+1}$  eindeutig bestimmt zu

$$(24) \quad f_{k+1} = \frac{k-\lambda}{(k+1)(k+1+\alpha)} f_k,$$

mit  $f_0 = 1$ . Nach der Quotientenregel können wir auch den Konvergenzradius der entstehenden Potenzreihe berechnen zu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} = \infty.$$

Falls  $\lambda \in \mathbb{N}_0$ , so verschwindet der Faktor im Zähler der Rekursionsformel (24) für  $k = \lambda$ . Also ist  $f_{\lambda+1} = f_{\lambda+2} = \dots = 0$ , das heisst unsere Potenzreihe ist endlich, und genauer ein Polynom vom Grad  $\lambda$ . Wir erhalten so gerade die vorher gefundenen Laguerre-Polynome.

Falls  $\lambda \notin \mathbb{N}_0$ , so sind alle  $f_k \neq 0$ . Wir behaupten nun, dass die in diesem Fall gefundenen Lösungen nicht auf normierbare Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms führen. Für jedes kleine  $\epsilon > 0$  und  $k$  gross genug und gilt nämlich

$$|f_{k+1}| > (1-\epsilon) \frac{|f_k|}{k+1}.$$

Das heisst, für  $k$  gross wachsen die Koeffizienten mindestens so schnell wie die der Exponentialreihe, und haben auch gleiches Vorzeichen. Man kann dadurch einfach zeigen (ÜA), dass

$$|f(x)| \geq e^{(1-\epsilon)x} - P(x),$$

wobei  $P(x)$  ein Polynom in  $x$  ist. Unsere Wellenfunktion  $\Psi$  hat aber die Form

$$\Psi \propto x^l f(x) e^{-\frac{\alpha}{2} Y_{lm}}$$

Insbesondere produziert der exponentielle Anstieg in  $f$  einen exponentiellen Anstieg der Wellenfunktion für  $x \rightarrow \infty$ , also ist  $\Psi$  nicht (quadrat-)integrierbar, und insbesondere nicht normierbar. Wir erhalten also keine weiteren Lösungen falls  $\lambda \notin \mathbb{N}_0$  und  $r = 0$ .

**Fall 2** ( $r = \alpha$ ): Wir möchten wieder die Rekursionsgleichung (23) jeweils für  $f_{k+1}$  lösen. Leider ist dies nun nicht mehr möglich, da der Koeffizient  $(k+1)(k+1+\alpha)$  verschwindet für  $k = -1$ . Wir können also mit unserem Ansatz nicht die zweite linear unabhängige Lösung finden. Sei nun  $f$  die in Fall 1 gefundene Lösung der Laguerreschen Differentialgleichung. Sei  $g$  die gesuchte zweite Lösung. Dann verwenden wir den neuen Ansatz

$$g(x) = C f(x) \ln(x) + \sum_{k=-r}^{\infty} h_k x^k,$$

wobei  $C, h_k$  zu bestimmende Konstanten sind. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$0 = C \underbrace{\left(-\frac{f(x)}{x} + f'(x) + (1+\alpha-x)\frac{f(x)}{x}\right)}_{=\beta} + \sum_{k=-r}^{\infty} (g_{k+1}(k+1)(k+1+\alpha) - g_k(k-\lambda)) x^k.$$

Entwickeln wir noch den ersten Term  $\beta$  zu

$$\beta = \sum_{k=-1}^{\infty} \beta_k x^k$$

so erhalten wir die neuen Rekursionsgleichungen

$$h_{k+1}(k+1)(k+1+\alpha) = h_k(k-\lambda) - C\beta_k.$$

Diese nun auch für  $k = -1$  lösbar, da  $\beta_1 \neq 0$ , und wir erhalten unsere zweite, linear unabhängige Lösung wie gesucht. Allerdings führen auch diese neuen Lösungen nicht zu physikalischen Lösungen für die Wellenfunktion. Mit  $\alpha = 2l + 1$  erhalten wir

$$g(x) \sim O(x^{-2l-1})$$

für  $x$  klein. Dies führt für  $l > 0$  zu nicht quadratintegrierbaren Wellenfunktionen, da in der Umgebung von 0 eine Divergenz auftritt. Für  $l = 0$  hat man dieses Problem zwar nicht, die gefundene Wellenfunktion ist aber dennoch keine (distributionelle) Lösung der Schrödingergleichung. (Denn  $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta$ , und kein Term in der Gleichung kürzt diese  $\delta$ -Distribution.)

## Literaturverzeichnis

- [1] L. Schwartz, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann, Paris 1961
- [2] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Academic Press 1980 (Band I)
- [3] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Interscience 1953 (3 Bände)
- [4] H. Royden, Real Analysis, Macmillan 1988
- [5] M. Taylor, Partial Differential equations, Vol. 1 Basic theory, Springer 1998
- [6] F. John, Partial Differential Equations, Springer 1982
- [7] E. Whittaker and G. Watson, A Course in Modern Analysis, Cambridge University Press 1958

### Danksagung

Ich danke Nadir Bayo, Anna Bot und Jürg Haag für die Korrektur von Fehlern und Faris Dizdarevic für den Latex-Mitschrieb vom Kapitel über Kugelfunktionen.



## Zusammenfassung der Lebesgue-Integrationstheorie

Das Lebesguesche Integral verallgemeinert das Riemannsches Integral. Seine Vorteile liegen für unsere Anwendungen vor allem bei den wichtigen Konvergenzsätzen, die Kriterien für die Vertauschbarkeit von Limes und Integral angeben, und dem Satz von Fubini, der für die Vertauschung von Integrationen in mehrfachen Integralen relevant ist. Die zugrundeliegende Idee ist der Begriff des Masses.

*Literatur.*

H. Royden, Real Analysis, Macmillan 1988

E. Hewitt and K. Stromberg, Real and abstract analysis, Springer 1965

P. Halmos, Measure theory, van Nostrand 1950 / Springer 1974

### 1. Masstheorie

DEFINITION 1.1. Sei  $X$  eine Menge. Eine Menge  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  von Teilmengen von  $X$  heisst  $\sigma$ -Algebra, falls

- (i)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c (:= X \setminus A) \in \mathcal{A}$ ,
- (ii)  $(A_n)_{n=1}^\infty$  Folge in  $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$ .

Ist  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $A, B \in \mathcal{A}$ , dann ist auch  $A \cup B \in \mathcal{A}$  (Nehme  $A_1 = A, A_i = B, i \geq 2$ ). Ebenso  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c, X = A \cup A^c, \emptyset = X^c, A \setminus B = A \cap B^c$ . Ist  $(A_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathcal{A}$ , so ist  $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = (\bigcup_{n=1}^\infty A_n^c)^c \in \mathcal{A}$ .

DEFINITION 1.2. Ein *Mass* auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  von Teilmengen von  $X$  ist eine Funktion  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  mit den Eigenschaften

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- (ii)  $(A_i)_{i=1}^\infty$  Folge in  $\mathcal{A}$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j) \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ .

BEISPIEL 1.1.  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X) = \{\text{alle Teilmengen von } X\}$

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{Anzahl Elemente von } A, & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses Mass heisst Zählmass.

LEMMA 1.1. Sei  $\mu$  ein Mass auf  $\mathcal{A}$ . Dann

- (i)  $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ ,
- (ii)  $(A_i)_{i=1}^\infty$  Folge in  $\mathcal{A} \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ .

Sei von jetzt an  $X = \mathbb{R}^n$ . Ein Rechteck ist eine Menge der Form

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad a_i \leq b_i.$$

Das Volumen von  $R$  ist  $|R| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ . Definiere die Funktion  $\mu^*(A) : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  durch

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty |R_i| \mid R_i \text{ Rechtecke, } \bigcup_{i=1}^\infty R_i \supset A \right\}.$$

Eine Menge  $A$  mit  $\mu^*(A) = 0$  heisst Nullmenge.  $\mu^*$  ist das *Lebesguesche äussere Mass*. Es ist kein Mass, aber hat die Eigenschaften, die äussere Masse definieren:

- (i)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,
- (ii)  $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ,
- (iii)  $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ .

Es existieren aber („pathologische“) paarweise disjunkte Folgen mit

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \neq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

DEFINITION 1.3. Eine Menge  $E \subset \mathbb{R}^n$  heisst (Lebesgue-)messbar, falls  $\forall A \in \mathbb{R}^n$   $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$  gilt.

SATZ 1.2.

- (i) Die Lebesgue messbaren Mengen bilden eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$ .
- (ii) Die Einschränkung  $\mu$  von  $\mu^*$  auf  $\mathcal{A}$  ist ein Mass.
- (iii) Alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen sind Lebesgue messbar und  $\mu(R) = |R|$  für alle Rechtecke  $R$ .
- (iv) Nullmengen sind messbar und haben Mass null.

Das Mass  $\mu$  von Satz 1.2 heisst *Lebesguesches Mass*. Ist  $E \subset \mathbb{R}^n$  messbar, so ist die Einschränkung von  $\mu$  auf die messbaren Teilmengen von  $E$  ein Mass, das Lebesguesche Mass auf  $E$ .

BEMERKUNG 1.1. Aus den Axiomen für ein Mass folgt, dass das Lebesguesche Mass eines Produkt von beliebigen (geschlossenen, halboffenen oder offenen) Intervallen ebenfalls das Produkt ihrer Längen ist.

## 2. Das Lebesguesche Integral

Sei  $E$  eine feste messbare Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $\mu$  das Lebesguesche Mass auf  $E$ .

DEFINITION 2.1.  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  heisst *messbar*, falls  $f^{-1}(I) = \{x \in E \mid f(x) \in I\}$  messbar ist für alle Intervalle  $I$ .  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  heisst *messbar*, falls Realteil und Imaginärteil messbar sind.

SATZ 2.1. *Stetige Funktionen sind messbar. Summen und Produkte von messbaren Funktionen sind messbar. Punktweise Grenzwerte von Folgen messbarer Funktionen sind messbar.*

DEFINITION 2.2. Die charakteristische Funktion einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist die Funktion

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Funktionen der Form

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{E_i}(x), \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

wobei  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  und  $E_i \subset E$  messbare Mengen sind, heissen *einfach*.

Das Lebesguesche Integral wird zuerst für einfache Funktionen definiert.

DEFINITION 2.3. Sei  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{E_i}(x)$  eine einfache Funktion mit  $\mu(E_i) < \infty$  für  $i = 1, \dots, m$ . Das *Integral* von  $\varphi$  ist die Zahl

$$\int_E \varphi(x) dx := \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu(E_i).$$

Man zeigt, dass das Integral von  $\varphi$  nur von  $\varphi$  abhängt, und nicht von ihrer Darstellung als Linearkombination von charakteristischen Funktionen. Falls  $\varphi = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{E_i}$  mit *positiven* Koeffizienten  $\lambda_i$  und  $\mu(E_i) = \infty$  für ein  $i$ , dann setzt man  $\int_E \varphi(x) dx = \infty$ .

BEISPIEL 2.1. Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion,

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{[a_i, a_{i+1}[}, \quad a \leq a_1 < \dots < a_{m+1} \leq b.$$

Dann ist  $\int_{[a,b]} \varphi(x) dx = \sum \lambda_i (a_{i+1} - a_i)$  wie in der Riemannschen Theorie.

LEMMA 2.2. Seien  $\varphi_1, \varphi_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$  einfache Funktionen, und es gelte für alle  $x \in E$   $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ . Dann ist  $\int_E \varphi_1 dx \leq \int_E \varphi_2 dx$

LEMMA 2.3. Sei  $f \geq 0$  messbar. Dann existiert eine Folge  $\varphi_i$  von einfachen Funktionen mit  $0 \leq \varphi_i(x) \leq \varphi_{i+1}(x)$  und  $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i(x) = f(x)$  für alle  $x \in E$ .

LEMMA UND DEFINITION 2.4. Sei  $f \geq 0$  messbar,  $\varphi_i$  eine Folge wie in Lemma 2.3. Der Grenzwert

$$\int_E f(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E \varphi_i(x) dx \in [0, \infty]$$

ist unabhängig von der Wahl der Folge  $\varphi_i$ . Ist  $\int_E f(x) dx < \infty$ , dann heisst  $f$  (Lebesgue-) integrierbar und  $\int_E f(x) dx$  das Lebesguesche Integral von  $f$ .

DEFINITION 2.4. Sei  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und sei

$$f_{\pm}(x) := \max\{\pm f(x), 0\}.$$

Die Funktionen  $f_{\pm}$  sind messbar und nicht negativ.  $f$  heisst (Lebesgue-) integrierbar, falls  $f_{\pm}$  integrierbar sind.

Das Integral von  $f$  ist dann

$$\int_E f(x) dx = \int_E f_+(x) dx - \int_E f_-(x) dx.$$

DEFINITION 2.5.  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  heisst integrierbar, falls Realteil und Imaginärteil integrierbar sind. Das Integral von  $f$  ist

$$\int_E f(x) dx = \int_E \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_E \operatorname{Im} f(x) dx.$$

LEMMA 2.5. Sei  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  messbar. Dann ist  $|f|$  messbar und  $f$  ist genau dann integrierbar, falls  $|f|$  integrierbar ist, d.h. wenn  $\int_E |f(x)| dx < \infty$ .

Alternative Notationen:

$$\int_E f(x) dx = \int_E f(x_1, \dots, x_n) d^n x = \int_E f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

DEFINITION 2.6. Eine Eigenschaft  $P(x)$  von Punkten in  $E$  gilt fast überall (f.ü.), falls

$$\mu(\{x | P(x) \text{ gilt nicht}\}) = 0.$$

SATZ 2.6. Seien  $f, g$  integrierbar,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

(i)  $\alpha f + \beta g$  ist integrierbar und

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_E f(x) dx + \beta \int_E g(x) dx$$

(ii)  $f \leq g \Rightarrow \int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx$ .

(iii)  $f(x) = g(x)$  f.ü.  $\Rightarrow \int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx$ .



- (iv)  $\int_E |f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$  f.ü.
- (v)  $|\int_E f(x) dx| \leq \int_E |f(x)| dx$
- (vi) Ist  $F \subset E$  messbar, so ist die Einschränkung von  $f$  auf  $F$  ebenfalls integrierbar, und es gilt  $\int_F f(x) dx = \int_E f(x) \chi_F(x) dx$ .
- (vii) Ist  $f$  Riemann-integrierbar auf  $[a, b] \Rightarrow f$  Lebesgue-integrierbar und das Lebesguesche Integral stimmt mit dem Riemannsches überein.
- (viii) Für alle affinen Transformationen  $x \rightarrow Ax + b$  von  $\mathbb{R}^n$ , ist  $x \mapsto f(Ax + b)$  integrierbar und es gilt  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + b) dx$ .

Uneigentliche Riemannsche Integrale werden in den Übungen diskutiert.

### 3. Konvergenzsätze

Sei  $E$  wiederum eine feste messbare Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Alle Funktionen seien auf  $E$  definiert.

**SATZ 3.1.** (B. Levi, Satz von der monotonen Konvergenz) *Sei  $f_i$  eine Folge integrierbarer Funktionen mit  $0 \leq f_i(x) \leq f_{i+1}(x) \rightarrow f(x)$  ( $i \rightarrow \infty$ ) für alle  $x \in E$ . Ist die Folge  $\int_E f_i(x) dx$  beschränkt, so ist  $f$  integrierbar und es gilt*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

**SATZ 3.2.** (H. Lebesgue, Satz von der dominierten Konvergenz) *Sei  $f_i$  eine Folge integrierbarer Funktionen mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f(x)$  und es existiere eine integrierbare Funktion  $g$  mit  $|f_i(x)| \leq g(x) \forall i, x$ . Dann ist  $f$  integrierbar und es gilt*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

### 4. Der Satz von Fubini

Seien  $E \subset \mathbb{R}^n$  und  $F \subset \mathbb{R}^m$  feste messbare Mengen. Wir betrachten messbare Funktionen auf  $E \times F \subset \mathbb{R}^{n+m}$ .

**LEMMA 4.1.** *Sei  $f : E \times F \rightarrow \mathbb{C}$  messbar. Ist  $f(x, \cdot)$  für alle  $x \in E$  (bzw.  $f(\cdot, y)$  für alle  $y \in F$ ) integrierbar, so ist die Funktion  $y \mapsto \int_E f(x, y) dx$  (bzw.  $x \mapsto \int_F f(x, y) dy$ ) messbar. Existiert eins der folgenden Integrale*

$$\int_{E \times F} |f(x)| dx, \quad \int_F \left( \int_E |f(x, y)| dx \right) dy, \quad \int_E \left( \int_F |f(x, y)| dy \right) dx,$$

so existieren sie alle drei und es gilt

$$\int_{E \times F} f(x) dx = \int_F \left( \int_E f(x, y) dx \right) dy = \int_E \left( \int_F f(x, y) dy \right) dx.$$

Falls  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$ , kann also  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$  als mehrfaches Integral ausgerechnet werden:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x) dx_1 \cdots dx_n.$$

Die Reihenfolge in welcher die einzelnen Integrale ausgeführt werden spielt dabei keine Rolle.

### 5. $L^p$ -Räume

Sei  $E \in \mathbb{R}^n$  eine feste messbare Menge. Alle Funktionen seien komplexwertig und auf  $E$  definiert. Analoge Resultate gelten für reellwertige Funktionen.

DEFINITION 5.1. Zwei integrierbare Funktionen  $f, g$  heissen *äquivalent* ( $f \sim g$ ), falls  $f(x) = g(x)$  fast überall.

Die Menge der Äquivalenzklassen von integrierbaren Funktionen heisst  $L^1(E)$ :

$$L^1(E) = \left\{ f \text{ messbar} \mid \int_E |f(x)| dx < \infty \right\} / \sim$$

Allgemeiner für  $p \geq 1$

$$L^p(E) = \left\{ f \text{ messbar} \mid \int_E |f(x)|^p dx < \infty \right\} / \sim$$

Gilt  $f_1 \sim f_2$  und  $g_1 \sim g_2$ , so ist  $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$ . Also ist die Summe von Äquivalenzklassen wohldefiniert. Ebenso die Multiplikation mit komplexen Zahlen. Man hat dann folgendes Resultat.

LEMMA 5.1.  $L^p(E)$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ .

DEFINITION 5.2. Sei  $V$  ein komplexer Vektorraum. Eine Funktion  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  heisst *Norm* auf  $V$ , falls

- (i)  $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ,
- (ii)  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, f \in V$ ,
- (iii)  $f, g \in V \Rightarrow \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ .

Ein Vektorraum, der mit einer Norm versehen ist, heisst ein normierter Vektorraum.

SATZ 5.2.  $L^p(E)$  mit der Norm

$$\|f\|_p = \left( \int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist ein normierter Vektorraum.

(i) und (ii) sind klar. Die Dreiecksungleichung (iii) kann leicht nachgewiesen werden für  $L^1$ . Für  $L^p$  heisst sie Minkowski-Ungleichung und ist etwas subtiler.

DEFINITION 5.3. Eine Folge  $(f_i)_{i=1}^\infty$  in einem normierten Vektorraum  $V$  konvergiert gegen  $f \in V$ , falls

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i - f\| = 0.$$

Man schreibt in diesem Falle  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$ . Eine Folge heisst *Cauchy-Folge*, falls  $\forall \epsilon > 0 \exists N > 0$  mit

$$\|f_i - f_j\| < \epsilon \quad \forall i, j > N.$$

Ein normierter Vektorraum  $V$  heisst *Banachraum*, falls alle Cauchy-Folgen in  $V$  konvergieren.

SATZ 5.3. (Riesz-Fisher) Für alle  $p \geq 1$  ist  $L^p(E)$  ein Banachraum.

DEFINITION 5.4. Der Träger einer Funktion  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  ist die Menge

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}},$$

wobei  $\overline{\phantom{x}}$  den Abschluss in  $E$  (Menge der Häufungspunkte in  $E$ ) bezeichnet. Wir verwenden die Notation  $C_0(E) := \{\text{stetige Funktionen auf } E \text{ mit kompaktem Träger}\}$ .

Der Raum  $C_0(\mathbb{R}^n)$  besteht beispielsweise aus allen stetigen Funktionen  $f$ , die ausserhalb einer (von  $f$  abhängigen) beschränkten Menge verschwinden.

SATZ 5.4. *Die stetigen Funktionen mit beschränktem Träger sind dicht in  $L^p(E)$ , d.h.  $\forall f \in L^p(E) \forall \epsilon > 0 \exists g \in C_0(E)$  mit  $\|f - g\|_p < \epsilon$ .*