Aufgabe 1. Eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst Lebesgue messbar, falls $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1}$$

wobei μ^* das äussere Mass ist. Das Lebesguesche Mass ist die Einschränkung des äusseren Masses auf die Lebesgue messbaren Mengen. Beweise:

a) Sei $\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \mid E \text{ Lebesgue messbsar}\}$. $\mathcal{A}$ bildet eine σ-Algebra.
Hinweis: Ersetze A in (1) durch geeignete Testmengen.

b) Das Lebesgue-Mass ist ein Mass.

Aufgabe 2. Zeige, dass das Lebesgue Integral wohldefiniert ist. Gehe wie folgt vor. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und $0 \leq f : E \to \mathbb{R}$ messbar.

a) Es existiert eine monoton wachsende Folge $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$ von einfachen Funktionen die punktweise gegen f konvergiert.

b) Sei $\phi : E \to \mathbb{R}$ einfach, $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Mengen mit $E_j \subseteq E_{j+1}$ und $\cup_j E_j = E$. Dann gilt $\lim_{j\to\infty} \int_{E_j} \phi dx = \int_E \phi dx$.

c) Sei $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$ von einfachen Funktionen und sei $g \geq 0$ eine einfache Funktion sodass $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \geq g(x)$ für alle $x \in E$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \int \phi_n dx \geq \int g dx$.

d) Es sei $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie in (a). Das Lebesgue Integral $\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E \phi_n(x)$ ist unabhängig von der gewählten Folge.

Aufgabe 3. Beweise den Satz von der monotonen Konvergenz (Satz 3.1, Appendix A). Gehe dazu wie folgt vor.

a) Zeige $\lim_{j\to\infty} \int f_j dx \leq \int f dx$

b) Sei $a \in (0,1)$ und $0 \leq \phi \leq f$ einfach. Dann gilt $\int a\phi dx \leq \lim_{j\to\infty} \int f_j dx$.
Hinweis: Betrachte Mengen $E_{j,a} = \{x \mid f_j(x) \geq a\phi(x)\}$, verwende (2b).

c) Folgere den Satz von der monotonen Konvergenz.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ für $x \in [-\pi, \pi)$ die Sägezahnfunktion. Berechne ihre Fourierkoeffizienten $f_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx$.

Aufgabe 5.

a) Zeige mit Hilfe des DCT $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^a x}{1+n^b x^2} e^{-x^2} dx = 0$ für alle $0 < a < b$.

b) Finde glatte Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sodass $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aber so dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

c) Finde glatte Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aber so dass die f_n für $n \to \infty$ gleichmässig gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 6. Seien $1 \leq p, q \leq \infty$. Definiere

$$\begin{aligned}
\ell^p &= \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid (\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |a(n)|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\} \quad , \quad p < \infty \\
\ell^\infty &= \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} |a(n)| < \infty\} \\
L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) &= \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \forall K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt } : f|_K \in L^p(K)\}
\end{aligned}$$

a) Zeige $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$ genau dann wenn $p \leq q$.

b) Zeige $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ genau dann wenn $q \leq p$.

c) Zeige $L^p(\mathbb{R}^n) \not\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \neq q$.