Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgende Version vom Satz von Parseval. Sei $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{\frac{2\pi inx}{L}}$ eine durch eine absolut konvergent Fourierreihe beschriebene Funktion, d.h. $\sum_n |f_n| < \infty$. Sei g L-periodisch und über $[0, L]$ integrierbar. Dann gilt

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{L}\int_0^L \bar{f}(x)g(x)dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{f}_n g_n,$$

wobei g_n die Fourierkoeffizienten von g sind. Insbesondere gilt mit $g = f$

$$\frac{1}{L}\int_0^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2.$$

Bemerkung: Wir werden bald sehen, dass man die Voraussetzung durch $f, g \in L^2([0, L])$ *ersetzen kann.*

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi < x < 0 \\ \sin x & , \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die reelle und die komplexe Fourierreihe von f.

b) Berechnen Sie $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Aufgabe 3. Finden Sie die Fourierreihen der folgenden Funktionen und bestimmen Sie gegen welche Fuktion die Reihe konvergiert.

a) $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin^p(x)$

b) $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \exp(\exp(ix))$

c) $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}$

d) $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ für $x \in [0, 2\pi)$.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (1 - 2x)^2$ für $x \in [0, 1)$.

a) Zeige: $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^\infty \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos(2\pi nx)$ konvergiert gleichmässig gegen f.

b) Berechne $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

c) Benutze alternativ die Produktdarstellung $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^\infty (1 - \frac{z^2}{n^2})$ um $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ zu berechnen.

Aufgabe 5. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, \infty))$ beschränkt und

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u(x, y) = 0 \quad , \quad y > 0$$
$$u(x, 0) = f(x)$$

Bestimmen Sie u, zeigen Sie, dass u eindeutig ist und zeigen Sie $\lim_{y\to\infty} u(x, y) = \int_0^1 f(s)ds$

Aufgabe 6.

Sei $f \in C^1_{pw}(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ sodass an jeder Sprungstelle die rechts- und linksseitigen Grenzwerte und Ableitungen existieren. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty} s_N f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2} \ .$$

Die rechts- und linksseitige Ableitung an der Stelle x ist gegeben durch

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x+)}{h} \quad , \quad \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-)}{h}$$

Hinweise: (i) Führe die Aussage auf $L = 2\pi$, $x = 0$ zurück. (ii) Führe den Beweis ähnlich wie in der Vorlesung (Skript S. 6), mit entsprechend modifizierten Funktionen F anstelle von F_x. Es ist hilfreich, das Integral in einen Teil $y < 0$ und einen $y > 0$ zu teilen. (iii) Wende wieder das (L^1) Riemann Lebesgue Lemma an, d.h. benutze, dass für $f \in L^1([a,b])$ gilt $\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_a^b f(x)e^{i\lambda x} = 0$.