Aufgabe 1. Sei

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \|\phi\|_{\alpha,\beta} < \infty \;\; \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}\}$$

der Schwartzraum, wobei $\|\phi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi|$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ein Frechet-Raum ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor. Wir schreiben $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

a) Die $\|\cdot\|_{\alpha,\beta} : \mathscr{S} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind Halbnormen, d.h. es gilt $\|\lambda\phi\|_{\alpha,\beta} = |\lambda|\|\phi\|_{\alpha,\beta}$ und $\|\phi_1 + \phi_2\|_{\alpha,\beta} \leq \|\phi_1\|_{\alpha,\beta} + \|\phi_2\|_{\alpha,\beta}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $\phi_1, \phi_2 \in \mathscr{S}$.

b) Die Abbildung $d : \mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} 2^{-|\alpha|-|\beta|} \frac{\|\phi_1 - \phi_2\|_{\alpha,\beta}}{1 + \|\phi_1 - \phi_2\|_{\alpha,\beta}}$$

ist eine Metrik auf $\mathscr{S}$, d.h. eine Abbildung mit $d(\phi_1, \phi_2) = d(\phi_2, \phi_1)$, $d(\phi_1, \phi_2) = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$ und $d(\phi_1, \phi_2) \leq d(\phi_1, \phi_3) + d(\phi_3, \phi_2)$ für alle $\phi_i \in \mathscr{S}$.

c) Eine Folge $\phi_n \in \mathscr{S}$ ist Cauchy in der in (b) konstruierten Metrik, genau dann wenn sie in jeder der Halbnormen aus (a) Cauchy ist.

d) $\mathscr{S}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge in $\mathscr{S}$ konvergiert.

Aufgabe 2. Seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Faltung $f * g$ von f mit g ist definiert durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$$

Zeigen Sie

a) Die Faltung ist eine bilineare, assoziative, kommutative Abbildung $L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere ist $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.

b) Zeigen Sie $\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$.

c) Wenn f oder g eine bestimmte Regularität hat, dann wird diese an die Faltung übertragen, im folgenden Sinne:
Sei $f \in C^\ell(\mathbb{R}^n)$ für ein $\ell \geq 0$ beschränkt mit beschränkten partiellen Ableitungen. Dann ist $f * g \in C^\ell(\mathbb{R}^n)$.
Insbesondere gilt $\partial_\alpha(f * g) = (\partial_\alpha f) * g$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \ell$.

d) Benutze die Fouriertransformation von $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ um die Fouriertransformation der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ 1 - |x| & \text{sonst} \end{cases}$$

zu berechnen.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Fouriertransformation folgender Funktionen.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{m^2+x^2}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x^2}$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto e^{-|x|} \cos x$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto e^{-|x|} \sin x$

e) $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto e^{-\mu|x|} \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ für $\mu > 0$. Berechne den Limes $\lim_{\mu \to 0} \widehat{f_\mu}(k)$.
Bemerkung: $f_\mu \in L^1(\mathbb{R})$ *für alle* $\mu > 0$ *aber* $f_0 \notin L^1(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m^2+x^2)^2} dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+x^2)} dx$

Hinweis: Benutzen sie den Satz von Plancherel mit geeigneten Funktionen.

Aufgabe 5.

a) Sei $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i}^2 : C^\infty(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3)$ der Laplace Operator in Standardkoordinaten (x_1, x_2, x_3). Definiere

$$\begin{aligned} \varphi : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\phi) &\mapsto (r \sin\theta \cos\phi\,,\; r\sin\theta\sin\phi\,,\; r\cos\theta) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ gilt

$$(\Delta f) \circ \varphi = \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2} \right)(f \circ \varphi)$$

mit

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \left(\sin\theta \partial_\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2$$

b) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine rotationsinvariante Funktion. Berechnen Sie Δf.

Aufgabe 6. Sei $\mathcal{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformation auf dem Schwartzraum.

a) Zeigen Sie $\mathcal{F}^4 = (2\pi)^{2n}\mathbb{1}$. Was können Sie über die Eigenwerte schliessen?

b) Sei $n = 1$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ den 4 dimensionalen Raum

$$X = \left\{ \left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) e^{-\frac{1}{2}x^2} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C} \right\}$$

auf sich selbst abbildet und bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathcal{F}$.

Bemerkung: Die Konstante $(2\pi)^{2n}$ *ist abhängig von der Normierung der Fouriertransformation. Für* $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ikx}$ *gilt* $\mathcal{F}^4 = \mathbb{1}$.