Aufgabe 1. Sei $z \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$. Die Besselfunktion erster Art der Ordnung α ist die durch die konvergente Potenzreihe

$$J_\alpha(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!\Gamma(\ell+\alpha+1)} (\frac{z}{2})^{2\ell+\alpha}$$

definierte Funktion der komplexen Variable z.

a) Zeigen Sie, dass J_α die Bessel Differentialgleichung

$$J''_\alpha + \tfrac{1}{z} J'_\alpha + (1 - \tfrac{\alpha^2}{z^2}) J_\alpha = 0$$

erfüllt.

b) Sei $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass J_n die bis auf Normierung eindeutige Lösung der Bessel Differentialgleichung auf der Halbachse $z > 0$ ist, die sich als C^1 Funktion auf den Ursprung erweitern lässt.
Hinweis: Verwenden Sie die Wronski Determinante. Für differenzierbare Funktionen f, g ist diese gegeben durch $W(f,g) = \det \begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix}$. Sind f, g lineare unabhängige Lösungen der Differentialgleichung, so ist $W \neq 0$ und erfüllt selbst eine interessante Differentialgleichung $W' = (\dots)$.

c) Sei $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten am Ursprung der von J_α linear unabhängigen Lösungen der Bessel Differentialgleichung.

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, $e^{iz\sin\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\theta} J_n(z)$ beziehungsweise

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{iz\sin\theta} d\theta$$

Aufgabe 3.
Sei $z \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$. Zeigen Sie die Relationen

a) $J'_\alpha(z) + \frac{\alpha}{z} J_\alpha(z) = J_{\alpha-1}(z)$

b) $J'_\alpha(z) - \frac{\alpha}{z} J_\alpha(z) = -J_{\alpha+1}(z)$,

c) $J_{\alpha-1}(z) + J_{\alpha+1}(z) = \frac{2\alpha}{z} J_\alpha(z)$,

d) $J_{\alpha-1}(z) - J_{\alpha+1}(z) = 2J'_\alpha(z)$.

e) $\frac{d}{dz}(z^\alpha J_n(z)) = z^\alpha J_{\alpha-1}(z)$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie die folgende Aussage. Sei $f \in C_0^s(\mathbb{R}^n) = \{$Funktionen mit kompaktem Träger, s mal stetig differenzierbar$\}$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{c}{(1+|k|)^s}$$

Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall $s = 0$.

Aufgabe 5.

a) Beweisen Sie den Satz von Morera. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion so dass
$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$
für jede stückweise C^1 Kurve $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \Omega$. Dann ist f holomorph.

b) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(\xi, z) \mapsto f(\xi, z)$ eine stetige Funktion, und holomorph in z. Dann ist das Integral über ein Kompaktum $\int_{K\subseteq\mathbb{R}} f(\xi, z)d\xi$ wieder holomorph.

c) Die Fouriertransformation einer Funktion mit kompaktem Träger ist ganz.

Aufgabe 6. Berechnen Sie die Fouriertransformation der folgenden rotationsinvarianten Funktionen.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-m\|x\|}$ für $m > 0$.

b) Die charakteristische Funktion von $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq R\}$.

c) Die charakteristische Funktion von $D_R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq R\}$.
Hinweis. Verwenden Sie 3e.