Aufgabe 1.

a) Sei für eine symmetrische positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Gaussfunktion gegeben durch

$$\Phi_A(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^t A^{-1} x}}{\sqrt{(2\pi)^n \det(A)}}$$

Zeigen Sie, $\Phi_A * \Phi_B = \Phi_{A+B}$.
Hinweis: Verwenden Sie den Faltungssatz von Serie 4, 2b.

b) Berechnen Sie eine Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad (t > 0) \qquad\qquad u(x,0) = x_1 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-\frac{1}{4}x_3^2}$$

Hinweis: Verwenden Sie (a) und Serie 4, 2c.

Aufgabe 2. Wir zeigen, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung im allgemeinen nicht eindeutig ist, indem wir eine nichttriviale glatte Lösung mit trivialen Anfangsdaten konstruieren.

a) Für beliebiges $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ definieren wir $u(x,t) = \sum_{k\geq 0} u_k(x,t)$ mit

$$u_k(x,t) = \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

Zeigen Sie, falls $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $\partial^\alpha \sum_k u_k = \sum_k \partial^\alpha u_k$, dann erfüllt u die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \partial_x^2 u$ mit $u(0,t) = g(t)$ und $\partial_x u(0,t) = 0$.

b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt. Zeigen Sie, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$ die Summe $\sum_{k\geq 0} \|\partial^\alpha u_k\|_{L^\infty(K)}$ endlich ist, dann ist

$$\textstyle\sum_k u_k \in C^\infty(K) \qquad\qquad \partial^\alpha \sum_k u_k(x,t) = \sum_k \partial^\alpha u_k(x,t)$$

c) Wir wählen nun eine geeignete Funktion g

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Bedingung in (b) für alle $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt erfüllt ist. Schliessen Sie, dass Sie eine glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung konstruiert haben, welche nicht null ist für $t > 0$ und null ist für $t \leq 0$.
Hinweis: Zeigen Sie mit der Cauchy Integralformel, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass für alle $t > 0$ gilt $|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(ct)^k} e^{-\frac{1}{2t^2}}$.

Aufgabe 3. Sei

$$\ell^2 = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)|^2 < \infty\}$$

der Vektorraum der quadratsummierbaren Folgen mit punktweise Addition und skalarer Multiplikation. Verifizieren Sie

a) $(-,-) : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$, $(a,b) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{a(n)} b(n)$ ist ein Skalarprodukt.

b) $\| - \| : \ell^2 \to \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ ist eine Norm.

c) $(\ell_2, (-,-))$ ist ein Hilbertraum.

Aufgabe 4. Betrachte die halb offene schwingende Saite, beschrieben durch das Anfangs-/Randwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t) \\ u(0,t) &= \partial_x u(L,t) = 0 \\ u(x,0) &= v(x)\ ,\ \partial_t u(x,0) = w(x) \end{aligned}$$

a) Betrachte glatte Lösungen der Differentialgleichung der separierten Form $u(x,t) = g(x)f(t)$ und löse das so entstehende Eigenwertproblem. Was sind die Eigenschwingungen und Eigenfrequenzen der Saite?

b) Zeige, dass die (geeignet normierten) Eigenfunktionen aus a) eine Orthonormalbasis von $L^2([0,L])$ bilden.

Hinweis: Gegeben $f \in L^2([0,L])$ betrachte die Fourierreihenentwicklung einer geeigneten $4L$-periodischen Fortsetzung $\tilde{f}$ von f.

c) Löse das Problem für v, w C^4-Funktionen mit kompaktem Träger in $(0,L)$.

Bemerkung: Mit anderen Methoden kann man die Voraussetzungen noch abschwächen auf $v \in C^2([0,L])$, $v(0) = v''(0) = v'(L) = 0$, $w \in C^1([0,L])$, $w(0) = w'(L) = 0$.

Aufgabe 5. Stetigkeit von Operatoren.

a) Sei $F : U \to V$ eine lineare Abbildung von normierten Vektorräumen. Zeigen Sie, dass F stetig ist genau dann wenn F beschränkt ist, also ein $C > 0$ existiert so dass

$$\|Fu\|_V \leq C\|u\|_U$$

Das Infimum aller solchen C's nennt man dann die Operatornorm $\|F\|$.

b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen stetig sind.

(a) $\frac{d}{dx} : (C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \| - \|_\infty) \to (C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \| - \|_\infty)$

(b) $T_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $(T_a f)(x) = f(x-a)$

(c) $\frac{d}{dx} : (\mathscr{S}(\mathbb{R}), \|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) \to L^2(\mathbb{R})$

(d) $\ell^2 \to \ell^2$, $(a_1, a_2, ...) \mapsto (c_1 a_1, c_2 a_2, ...)$ wobei (c_j) eine beschränkte Folge ist.

Zusatz: Bestimmen Sie die Operatornormen für die stetigen Abbildungen.

c)* Zeigen Sie allgemeiner, dass eine lineare Abbildung $F : (U, \| - \|_\alpha\,, \alpha \in I) \to (V, \| - \|_\beta\,, \beta \in J)$ zwischen lokalkonvexen Räumen genau dann stetig ist, wenn für jedes $\beta \in J$ eine Konstante C und eine endliche Teilmenge $K \subseteq I$ existiert mit

$$\|Fu\|_\beta \leq C(\textstyle\sum_{\alpha\in K} \|u\|_\alpha)$$

(Man darf vereinfachend annehmen, dass I, J höchstens abzählbar sind und stetig = folgenstetig ist.) Zeigen Sie nun, dass die Abbildungen $x^a\partial^b : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, $a, b \in \mathbb{N}_0$ stetig sind.

Aufgabe 6. Betrachte die Hermitefunktionen

$$h_n(x) := (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \tfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

a) Verifiziere die Gleichung für die erzeugende Funktion

$$F(x,t) := e^{\frac{1}{2}x^2-(x+it)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) \frac{(-it)^n}{n!}$$

b) Benutze die Cauchysche Integralformel um zu zeigen, dass für R gross genug ($R > |t|$) und $N \in \mathbb{N}$ beliebig gilt

$$|\textstyle\sum_{n=0}^{N} h_n(x) \tfrac{(-it)^n}{n!}| \leq \tfrac{1}{1-\frac{|t|}{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2+2|x|R+R^2}$$

c) Berechne die Fouriertransformation von $x \mapsto F(x,t)$ und zeige damit, dass

$$\hat{h}_n(k) = \sqrt{2\pi}(-i)^n h_n(k)$$

d.h. die Hermitefunktionen sind Eigenvektoren der Fouriertransformation.