Da die Serien bisher etwas lang waren werden wir neu einzelne Teilaufgaben mit "(opt)" (optional) kennzeichnen. Die Bearbeitung dieser Teilaufgaben ist für den Bonus nicht erforderlich. Allenfalls dürfen (und sollen) die Ergebnisse dieser Teilaufgaben dennoch für die Bearbeitung anderer Aufgaben verwendet werden.

Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Legendre Polynome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

a) Explizite Formel:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{(n-k)!(n-2k)!k!} x^{n-2k}$$

b) Erzeugende Funktion (wichtig in der Physik!):

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2tx}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$$

für $|t| < 1, x \in [-1, 1]$.

Hinweis: Man erinnere sich an die Binomialreihe aus der Analysis I.

c) (opt) Rekursionsrelation:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

Hinweis: Berechne $(1 + t^2 - 2tx)\partial_t F(t, x)$, wobei $F(t, x)$ die erzeugende Funktion von b) ist.

Aufgabe 2.

a) Beweisen Sie folgenden Satz (Approximationssatz von Weierstrass).

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall und $\epsilon > 0$. Dann existiert ein Polynom g so dass $|f(x) - g(x)| < \epsilon \forall x \in [a, b]$. In anderen Worten: Die Polynome sind dicht im Raum $(C([a, b]), \| - \|_\infty)$.

Hinweis: Es reicht (z.B.) $[a, b] = [0, \pi]$ anzunehmen. Führen Sie das Ergebnis dann zurück auf den Satz von Fejér, d.h., die Dichtheit der trigonometrischen Polynome im Raum der stetigen periodischen Funktionen. Benutzen Sie auch die aus der Analysis I bekannte Tatsache, dass eine Potenzreihe (wie z.B. die von exp*) gleichmässig konvergiert auf Scheiben B_r mit r kleiner als der Konvergenzradius.*

b) Zeigen Sie, dass die (entsprechend normierten) Legendre Polynome $\phi_l = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $L^2([-1, 1])$ bilden.

Hinweise: Verwenden Sie die Dichtheit der stetigen Funktionen in $L^2([-1, 1])$ und a). In der Vorlesung wird gezeigt, dass die ϕ_l tatsächlich orthonormal sind, dies darf verwendet und muss nicht nochmals gezeigt werden.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation $F : \mathscr{S}(R) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ eindeutig fortgesetzt werden kann zu einem stetigen Operator $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie ausserdem, dass $U = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F$ unitär ist, d.h. U ist bijektiv und

$$\langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle \; \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Hinweis: Arbeiten Sie in der Orthonormalbasis der Hermitefunktionen und benutzen Sie Ergebnisse von Serie 7.

Aufgabe 4. Benutzen Sie den Residuensatz aus der komplexen Analysis, um die Fouriertransformationen der Funktion

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2}$$

(mit $a > 0$) zu berechnen.

Hinweis: Schliessen Sie die Kontur in der oberen oder unteren Halbebene, je nach Vorzeichen von k.

Aufgabe 5. Sei H ein Hilbertraum und $V \subset H$ ein Unterraum.

a) Zeige, dass das orthogonale Komplement $V^\perp = \{f \in H \mid \langle v, f \rangle = 0 \forall v \in V\}$ abgeschlossen ist.

b) (opt) Sei nun V abgeschlossen und $f \in H$. Folgere aus b), dass es einen eindeutigen Vektor $f_V \in V$ gibt der die Funktion

$$V \ni v \mapsto \|f - v\|^2$$

minimiert. Dieses f_V ist die orthogonale Projektion von f auf V. Es gilt $f - f_V \in V^\perp$.

Hinweis: Wähle eine Folge v_n die das Infimum der Funktion realisiert und zeige, dass diese Folge eine Cauchyfolge ist. Man kann (optional) die Parallelogrammgleichung aus der Linearen Algebra Vorlesung verwenden, also, für u, v Vektoren in einem Skalarproduktraum

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

c) Folgere, dass für V abgeschlossen gilt

$$H = V \oplus V^\perp.$$

Aufgabe 6.

a) (opt) Folgere aus Aufgabe 5 c) den Darstellungssatz von Riesz:

Sei $l : H \to \mathbb{C}$ eine stetige lineare Funktion auf einem Hilbertraum H. Dann existiert genau ein $v \in H$, so dass für alle $x \in H$

$$l(x) = \langle v, x \rangle.$$

b) Sei $A : H \to H$ ein beschränkter linearer Operator auf einem Hilbertraum H. Zeige unter Benutzung von a), dass es einen eindeutigen Operator $A^* : H \to H$ gibt (der adjungierte Operator zu A), so dass für alle $f, g \in H$ gilt
$$\langle f, Ag \rangle = \langle A^* f, g \rangle.$$

Bemerkung: Die meisten wichtigen Operatoren in der Physik sind unbeschränkt und nur auf einem Teilraum des Hilbertraumes definiert, so z.B. der Orts- und Impulsoperator in der Quantenmechanik. Sei $A : D(A) \to H$ *ein (möglicherweise unbeschränkter) auf einem dichten Teilraum* $D(A) \subset H$ *definierter Operator. Dann definiert man den adjungierten Operator* $A^* : D(A^*) \to H$ *wie folgt. Es ist* $f \in D(A^*)$ *genau dann, wenn ein* $h \in H$ *existiert so dass* $\langle f, Au \rangle = \langle h, u \rangle$ *für alle* $u \in D(A)$. *In diesem Falle setzt man* $A^* f = h$. *Ein Operator* A *heisst selbstadjungiert, falls* $A = A^*$, *also (i)* $\langle f, Ag \rangle = \langle Af, g \rangle \forall f, g \in D(A)$ *(hermitesch) und (ii)* $D(A^*) = D(A)$.