Aufgabe 1. Sei $V_l := \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]_{=l}$ der Raum der homogenen Polynome vom Grad l. Sei $H_l = \{p \in V_l \mid \Delta p = 0\} \subseteq V_l$ der Teilraum der harmonischen Polynome.

a) Betrachten Sie auf V_l ein Skalarprodukt so dass für Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt $\langle x^\alpha, x^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}\alpha!$. Zeige, dass bezüglich dieses Skalarproduktes gilt $\Delta^* p = (x_1^2 + ... + x_n^2)p$, wobei $\Delta^* : V_l \to V_{l+2}$ der zu $\Delta : V_{l+2} \to V_l$ adjungierte Operator ist.

b) Folgern Sie die orthogonale direkte Summenzerlegung

$$V_{l+2} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)V_l \oplus H_{l+2}$$

Hinweis: Man erinnere sich an die lineare Algebra Vorlesung, insbesondere $V = \ker(A) \oplus \operatorname{im}(A^*)$ *für* $A : V \to W$ *wobei* V, W *endlichdimensionale Vektorräume mit Skalarprodukt sind.*

c) Folgern Sie, dass sich jedes Polynom als Linearkombination von Polynomen der Form $(x_1^2 + ... + x_n^2)^i h(x)$ mit $h \in H_l$ schreiben lässt.

Aufgabe 2. Betrachte die assoziierten Legendre Funktionen

$$P_{l,m}(x) = \frac{1}{2^l l!}(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2 - 1)^l$$

für $l = 0, 1, \ldots$ und $m = -l, \ldots, l$ und $x \in [-1, 1]$.

a) (opt) Zeigen Sie $P_{l,-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m}(x)$.

b) Zeigen Sie $P_{l,m}$ erfüllt die Legendresche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{d}{dx}P(x)\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right) P(x) = 0$$

mit $\lambda = l(l + 1)$.
Hinweis: Es reicht, $m \geq 0$ *anzuschauen. Leiten Sie die Differentialgleichung für* $P_l = P_{l,0}$ *aus der Vorlesung* m *mal ab.*

c) Folgern Sie, dass die Kugelfunktionen

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l + 1}{2} \frac{(l - m)!}{(l + m)!}} P_{l,m}(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

die Gleichung $\Delta_{S^2} Y_{l,m} = -l(l + 1)Y_{l,m}$ erfüllen.

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-1}^{1} P_{l,m}(x)P_{l',m}(x)dx = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + m)!}{(l - m)!}\delta_{ll'}$$

für $l, l' = 0, 1, 2, \ldots$ und $m = 0, 1, 2, ... \leq l, l'$

Hinweis: Verwenden Sie Partielle Integration und das in der Vorlesung gezeigte Resultat $\int_{-1}^{1}(x^2 - 1)^l dx = 2(-1)^l \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}$.

b) Folgern Sie die Orthogonalität der Kugelfunktionen

$$\langle Y_{l,m}, Y_{l',m'}\rangle_{S^2} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Aufgabe 4. Es sei J_n die $n$te Besselfunktion erster Art. Zeigen Sie, für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist die Menge der Nullstellen $\{a > 0 \mid J_n(a) = 0\}$ gegeben durch eine Folge $0 < a_{n,1} < a_{n,2} < \dots$ mit $\lim_{m\to\infty}(a_{n,m} - a_{n,m-1}) = \pi$.
Hinweis. Betrachten Sie den Winkel des komplexen Vektors $J_n(x)+iJ'_n(x)$, und zeigen Sie, dass dessen Ableitung für $x \to \infty$ gegen 1 strebt.

Aufgabe 5.

a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ die Einheitskreisscheibe. Sei $f \in C^\infty(D)$ mit stetiger Fortsetzung auf den Rand eine Eigenfunktion des Laplace Operators mit Dirichlet Randbedingung,

$$\Delta f = -\lambda f \quad (\text{auf } D) \qquad\qquad f|_{\partial D} = 0 \tag{1}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie $\lambda > 0$ und f ist eine endliche Linearkombination der Eigenfunktionen

$$e^{in\theta} J_n(a_{n,m} r)$$

b) Zeigen Sie, die Eigenfunktionen 1 zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle = \int_D f(x)\overline{g(x)}dx$.

Aufgabe 6.
Betrachten Sie die (Quadrupol-)Ladungsanordnung im $\mathbb{R}^3$:

Jeweils eine Punktladung $q = \frac{1}{\epsilon^2}$ in $(\pm\epsilon, 0, 0)$

Jeweils eine Punktladung $q = -\frac{1}{\epsilon^2}$ in $(0, \pm\epsilon, 0)$

Berechnen Sie im Limes $\epsilon \to 0$ die Multipolentwicklung des von der Ladungsanordnung erzeugten Potentials.
Hinweis: Alle physikalischen Konstanten im Coulombschen Gesetz dürfen gleich 1 gesetzt werden. Verwenden Sie die folgenden expliziten Formeln für die Kugelfunktionen

$$Y_{2,0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2}$$

$$Y_{2,1}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{(x+iy)z}{r^2} \qquad Y_{2,-1}(\theta,\varphi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{(x-iy)z}{r^2}$$

$$Y_{2,2}(\theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{(x+iy)^2}{r^2} \qquad Y_{2,-2}(\theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{(x-iy)^2}{r^2}$$

wobei $(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.