Aufgabe 1.

a) Sei $f \in L^2(S^2)$ die Einschränkung der Funktion

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{cases} 1 & z \geq 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

auf die Einheitssphäre. Entwickle f in Kugelfunktionen.

b) Löse mit a) formal das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \|x\| &< 1 \\ u(x) &= f(x) & \|x\| &= 1 \end{aligned}$$

Hinweis: Es soll hier nicht überprüft werden, dass die gewonnene $L^2(S^2)$ Lösung regulär ist.

Aufgabe 2.

a) (opt) Betrachte die sphärische Besselfunktion

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+\frac{1}{2}}(z)$$

Zeige, dass diese die folgende Integralformel erfüllt

$$j_l(z) = \frac{1}{2i^l} \int_{-1}^{1} e^{izt} P_l(t) dt$$

b) Benutze die Orthonormalität der Legendrepolynome $\sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l$ um mit a) die folgende Zerlegung der Exponentialfunktion zu zeigen

$$e^{izt} = \sum_{l \geq 0} (2l+1) i^l j_l(z) P_l(t)$$

c) Schliesse, dass die ebene Welle e^{ikx} im $\mathbb{R}^3$ wie folgt entwickelt werden kann

$$e^{ikx} = \sum_{l \geq 0} (2l+1) i^l j_l(\|k\|\|x\|) P_l(\hat{k}\,\hat{x}) = 4\pi \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(\|k\|\|x\|) Y_{lm}(\hat{k}) \overline{Y_{lm}(\hat{x})}$$

wobei $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}$, $\hat{k} = \frac{k}{\|k\|}$.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, so dass für ein $N \in \mathbb{N}$ gilt $f(x) \leq (1 + \|x\|^2)^N$. Zeige, dass die Zuordnung

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ni \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x) dx$$

eine temperierte Distribution beschreibt.

Aufgabe 4.

a) Sei $B = e_1, \ldots, e_n$ eine Basis vom $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass

$$f_B = \sum_{(k_1,..,k_n)\in\mathbb{Z}^n} \delta(x - k_1 e_1 - \cdots - k_n e_n)$$

eine temperierte Distribution ist. (Die Reihe konvergiert in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.)

b) Berechne die Fouriertransformation der Distribution f_B.
Hinweis: Poissonsche Summationsformel.

Aufgabe 5. Berechne die folgenden Ausdrücke im Distributionssinn:

a) $\frac{d}{dx_1}\|x\| \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

b) $\hat{x} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, das heisst die Fouriertransformation von $x \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$

c) $x * e^{-\frac{1}{2}x^2}$, das heisst die Faltung von $x \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ mit $e^{-\frac{1}{2}x^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$

d) (opt) $\omega * \delta$, wobei $\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ eine beliebige temperierte Distribution ist
Hinweis: Die Faltung einer temperierten Distribution g mit kompaktem Träger und einer Funktion $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist wieder eine Schwartzraumfunktion (nämlich $(g*\phi)(y) = g[\phi(y-x)]$). Ist f eine weitere Distribution dann ist die Faltung von f und g definiert durch $(f*g)[\phi] = f[\tilde{g}*\phi]$ wobei $\tilde{g}[\phi] = g[\phi(-x)]$.

e) $\lim_{\epsilon\downarrow 0}\log(x + i\epsilon) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ wobei log den Hauptzweig des komplexen Logarithmus bezeichnet.

f) Finde alle $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ so dass $xu = 0$.

Aufgabe 6. Zeige in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ für $k > 0$ die Formel

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{1}{\|x\|^2 - k^2 \pm i\epsilon} = P\left(\frac{1}{\|x\|^2 - k^2}\right) \mp i\pi\delta(\|x\|^2 - k^2)$$

wobei $P\big(\frac{1}{\|x\|^2-k^2}\big)[\phi] = \lim_{\delta\downarrow 0}\int_{|\|x\|^2-k^2|>\delta} \frac{\phi(x)}{\|x\|^2-k^2}dx$ und $\delta(\|x\|^2 - k^2)[\phi] = \int_{\|x\|=k} \frac{1}{2k}\phi(x)d\Omega_k$ mit $d\Omega_k$ dem Oberflächenelement der Sphäre $\{\|x\|^2 = k^2\}$.
Hinweis: Für $k > 0$ ist

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{1}{\|x\|^2 - k^2 \mp i\epsilon} = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{1}{\|x\|^2 - (k \pm i\epsilon)^2}$$