Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt und $\omega_f = 0$. Dann ist $f = 0$.
Hinweis: $\omega_f = 0$ bedeutet $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx = 0$ für alle $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\widehat{\omega_f} = \omega_{\hat{f}}$.

c) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\omega_f = 0$. Dann ist $f = 0$ f.ü.
Hinweis: Benutzen Sie $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$ f.ü..

Insbesondere ist die Abbildung $L^1(R^n) \to \mathscr{S}'(R^n)$ injektiv.

Aufgabe 2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Seien $g, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
Bemerkung: Insbesondere ist die in der Vorlesung gegebene Definition der Faltung einer temperierten Distribution mit einer Schwartzfunktion wohldefiniert.

b) Sei $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\widehat{g * \omega} = \hat{g}\,\hat{\omega}$.

Aufgabe 3.

a) Betrachten Sie die temperierte Distribution $F_\epsilon \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit

$$F_\epsilon(k) = \frac{1}{-(k_0 - i\epsilon)^2 + \|\vec{k}\|^2}$$

Zeigen Sie, dass $F := \lim_{\epsilon \downarrow 0} F_\epsilon$ existiert (in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$), und die Gleichung

$$(-k_0^2 + \|\vec{k}\|^2)F = 1$$

erfüllt.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\check{F}[\phi] = E[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\|\vec{x}\|}\phi(\|\vec{x}\|, \vec{x})d\vec{x}$$

Sei $u := E * f$ für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$u(x_0, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\|\vec{x} - \vec{x}'\|} f\left(x_0 - \|\vec{x} - \vec{x}'\|, \vec{x}'\right) d\vec{x}'$$

Aufgabe 4.

a) Sei f eine L-periodische lokal integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation von f (als temperierte Distribution) die Form

$$2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n\, \delta\left(k - \tfrac{2\pi n}{L}\right)$$

hat, wobei f_n der $n$te Fourierkoeffizient von f ist.

b) Bei der Frequenzmodulation (FM) in der Radiotechnik wird ein zu übertragendes Signal $x(t)$ auf eine Trägerwelle $e^{i\omega_c t}$ aufmoduliert zum gesendeten Signal

$$g(t) = e^{i\omega_c t + \alpha \int_0^t x(\tau) d\tau}$$

wobei α eine Konstante ist. Sei nun $x(t) = \cos(\omega t)$, mit typischerweise $\omega \ll \omega_c$. Berechnen Sie das Frequenzspektrum von $g(t)$.
Hinweis: Man erinnere sich an die Integraldarstellung der Besselfunktion von Serie 5.
Bemerkung: Beachten Sie, dass auch für ein bandlimitiertes Datensignal wie hier die Funktion $g(t)$ nicht bandlimitiert ist (also keinen kompakten Träger im Fourierraum hat). Dies ist anders bei der Amplitudenmodulation. Als Zusatzaufgabe können Sie dennoch die benötigte Bandbreite als Funktion von α näherungsweise abschätzen.

Aufgabe 5. Berechnen Sie alle Fundamentallösungen des Laplace Operators in einer Dimension. D.h. finden Sie alle Distributionen $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ mit

$$\tfrac{d^2}{dx^2} E = \delta$$

Gehen Sie wie folgt vor.

a) Sei $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution sodass $u'' = 0$. Dann gilt $u(x) = a + bx$ für Konstanten a, b.
Hinweis: Verwenden Sie Serie 10, Aufgabe 5f.

b) Finden Sie eine Lösung von $\frac{d^2}{dx^2} E = \delta$ und benutzen Sie a) um die allgemeine Form zu folgern.

Aufgabe 6. Berechnen Sie in $n \geq 3$ Dimensionen die inverse Fouriertransformation von $\frac{1}{\|k\|^2} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

a) Mit Hilfe der Formel für die Fundamentallösung E der Poissongleichung $\Delta E = \delta$.

b) Direkt mit Hilfe eines konvergenzerzeugenden Faktors wie in der Vorlesung.

Hinweis: Sie dürfen das folgende Integral ohne (aber natürlich auch mit) Beweis verwenden:

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{-1}^{1} du (1 - u^2)^{\frac{1}{2}(n-3)} (t - iu)^{2-n} = \pi$$