Aufgabe 1. Benutzen Sie die Methode der Spiegelladungen um die Greenschen Funktionen für folgende Gebiete zu finden.

a) $D = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) $D = \{re^{i\phi} \mid r > 0, \phi \in (0, \frac{\pi}{4})\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

c) (opt) $D = (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}) \times \mathbb{R}^2$ mit $L > 0$. (D.h., physikalisch sucht man das von einer Punktladung zwischen zwei geerdeten Platten erzeugte Potential.)

Aufgabe 2.

a) (Die Teilaufgabe wurde wahrscheinlich schon in der komplexen Analysis gelöst.) Sei $D \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $f = u+iv$. Dann gilt $\Delta u = \Delta v = 0$.

b) Betrachten Sie die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{\Im z > 0\} \subseteq \mathbb{C}$ und finden Sie eine Lösung für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } \mathbb{H} \\ u(x) &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}_{>0} \\ u(x) &= 1 && \text{auf } \mathbb{R}_{<0} \end{aligned}$$

Hinweis: Welche bekannte holomorphe Funktion hat einen Imaginärteil, der diese Randbedingungen efüllt?

c) Betrachten Sie das Gebiet $D = \{re^{i\phi} \mid r > 0, \phi \in (0, \frac{\pi}{4})\} \subseteq \mathbb{C}$. Finden Sie eine Lösung für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } D \\ u(x) &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}_{>0} \\ u(x) &= 1 && \text{auf } \{re^{i\frac{\pi}{4}} \mid r > 0\} \end{aligned}$$

Benutzen Sie dazu b) und eine geeignete holomorphe Funktion, die D auf $\mathbb{H}$ abbildet.

Aufgabe 3.

a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glatten Rand und sei u eine Lösung des Neumann-Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f && \text{auf } \partial D. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann gelten muss $\int_{\partial D} f(x) d\Omega(x) = 0$. (Insbesondere hat das Problem keine Lösung, falls f die Bedingung nicht erfüllt.)

b) Finden Sie eine Greensche Funktion $G(x, y)$ für Neumann Randbedingungen auf dem Kreis $K_R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < R\}$, d.h. eine Funktion der Form $\tilde{G}(x, y) = E(x - y) + h(x, y)$ mit $\Delta_x h(x, y) = 0$ und $\frac{\partial G}{\partial n}(x, y) = \frac{1}{|\partial K_R|} = \frac{1}{2\pi R}$ für $x \in \partial K_R$.

Hinweis: Verwende eine Spiegelladung.

Aufgabe 4. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $G(x,y)$ eine Greensche Funktion für D. Zeigen Sie, dass gilt $G(x,y) = G(y,x)$, d.h., die Greensche Funktion ist symmetrisch.

Gehen Sie dazu wie folgt vor.

a) Betrachten Sie die Funktionen $u(z) = G(z,x)$ und $v(z) = G(z,y)$. Sei $D_{x,y,\epsilon} = D \setminus (B_\epsilon(x) \cup B_\epsilon(y))$ für $\epsilon > 0$ klein genug. Dann sind u und v harmonisch auf $D_{x,y,\epsilon}$ und verschwinden beide auf ∂D.

b) Wenden Sie die Greensche Formel auf u und v an um zu zeigen, dass $u(y) = v(x)$.

Aufgabe 5. Beweisen Sie die folgenden Resultate für Distributionen.

a) (opt) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht.

b) (Differentiation unter der Klammer) Sei $\phi = \phi(x,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{m+n})$ und $\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$. Dann ist $y \mapsto \omega[\phi(\cdot,y)]$ wieder in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_y^\alpha \omega[\phi(\cdot,y)] = \omega[\partial_y^\alpha \phi(\cdot,y)].$$

Hinweis: Es reicht aus Symmetriegründen und mit Induktion, die Aussage für $\alpha = (1,0,\ldots,0)$ zu zeigen. Um den entsprechenden Limes ins Argument zu ziehen benutzen Sie die Stetigkeit von ω.

Bemerkung: Da Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, ist die Beschränktheit des Trägers in y-Richtung hierfür eigentlich unerheblich.

c) (Integration unter der Klammer) Mit den gleichen Voraussetzungen wir in b) gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega[\phi(\cdot,y)]dy = \omega[\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\cdot,y)dy]$$

Hinweis: Sie können b) und den Hauptsatz verwenden. Betrachten Sie zuerst den Fall $n = 1$.

Aufgabe 6. Sei $\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Man sagt, dass ω auf U verschwindet, falls $\omega[\phi] = 0$ für alle $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\phi \subseteq U$. Ist U die grösste solche offene Menge, so nennt man

$$\operatorname{supp}\omega := U^c$$

den Träger von ω. In dieser Aufgabe sollen Distributionen mit kompaktem Träger studiert werden; sei also im Folgenden $\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $K := \operatorname{supp}\omega$ kompakt.

a) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi \equiv 1$ in einer Umgebung von K. Dann definieren wir

$$\omega[f] := \omega[\chi f].$$

D.h., man kann Distributionen mit kompaktem Träger anwenden auf beliebige C^∞-Funktionen. Verifizieren Sie, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von χ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation von ω eine C^∞ Funktion ist, gegeben durch
$$\hat{\omega}(k) = \omega[e^{-ikx}].$$
Es gilt ferner
$$|\hat{\omega}(k)| \leq P(k)$$
mit einem Polynom $P(k)$. Insbesondere ist somit $\phi\hat{\omega} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ für alle $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Hinweis: Verwenden Sie für den letzten Teil Serie 7, Aufgabe 5c).

Bemerkung: Das Paley-Wiener-Schwartz Theorem besagt, dass $\hat{\omega}$ sogar holomorph ist und umgekehrt jede holomorphe Funktion (die eine geeignete Wachstumsbedingung erfüllt) so erhalten werden kann.

c) Gegeben $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\omega * \phi$ eine Schwartzraumfunktion und durch die Formel
$$(\omega * \phi)(y) = \omega[\phi(y - \cdot)]$$
gegeben.