Dies ist die letzte Serie und zählt nicht zum Bonussystem.

Aufgabe 1. Sei $\alpha \in (-1, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Die verallgemeinerten Laguerre Polynome können über die Rodriguez formel definiert werden

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+\alpha}\right)$$

Zeigen Sie die folgenden Resultate.

a) Orthogonalität bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_0^\infty \overline{f(x)} g(x) x^\alpha e^{-x} dx$:

$$\langle L_n^\alpha, L_m^\alpha\rangle = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{nm}$$

b) Die explizite Formel ist

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!}.$$

Hier ist

$$\binom{\beta}{j} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-j+1)}{j!}.$$

c) Die Laguerre Polynome sind Lösungen der Differentialgleichung

$$x \tfrac{d^2}{dx^2} L_n^\alpha + (\alpha+1-x) \tfrac{d}{dx} L_n^\alpha + n L_n^\alpha = 0$$

Aufgabe 2. Ziel dieser Aufgabe ist es, das Additionstheorem für die Kugelfunktionen

$$P_\ell(X \cdot Y) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(Y) \overline{Y}_{\ell m}(X) \qquad \forall \ell \in \mathbb{N}_0 \ \forall X, Y \in S^2$$

mit Hilfe der Poissonformel herzuleiten. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

a) Zeigen Sie zunächst

$$\int_{S^2} Y_{lm}(Y) P_{\ell'}(X \cdot Y) d\Omega(Y) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'} Y_{lm}(X).$$

Wenden Sie dazu die Poissonformel auf das harmonische Polynom $u(x) = |x|^l Y_{lm}(X)$ an, und verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannte Reihenentwicklung

$$\frac{1}{|x-y|} = \begin{cases} \sum_{l'=0}^\infty P_{l'}(X \cdot Y) \frac{|x|^{l'}}{|y|^{l'+1}} & |x| < |y| \\ \sum_{l'=0}^\infty P_{l'}(X \cdot Y) \frac{|y|^{l'}}{|x|^{l'+1}} & |x| > |y| \end{cases}$$

(mit $X = \frac{x}{|x|}$, $Y = \frac{y}{|y|}$).

b) Folgern Sie das Additionstheorem aus a).

Die beiden letzten Aufgaben stammen von einer alten MMP 1 Prüfung und sollen zur Rekapitulation und Prüfungsvorbereitung dienen. (Darüber hinaus wird Serie 14 eine Probeprüfung sein.)

Aufgabe 3. Sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < \|x\| < 2\}$. Finde die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + \frac{8}{\|x\|^2} u(x) &= 0 & x &\in \Omega \\ u(x) &= 0 \quad , & \|x\| &= 1 \\ u(x) &= P_3\left(\frac{x_3}{\|x\|}\right) & \|x\| &= 2 \end{aligned}$$

wobei P_3 das dritte Legendre Polynom ist, $P_3(w) = \frac{1}{2}w(-3 + 5w^2)$.

Hinweis: Die Funktion $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto P_l(\frac{x_3}{\|x\|})$ ist eine Eigenfunktion des sphärischen Laplaceoperators in 3 Dimensionen mit Eigenwert $-l(l+1)$.

Aufgabe 4. Sei $H = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$, $a \in \mathbb{R}$ und δ die Dirac'sche δ-Funktion. Sei $\phi \in C^\infty(H)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\phi(t, x) &= a\,\phi(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(t, x) \quad , \quad (t, x) \in H \\ \mathscr{S}'\text{-}\lim_{t \to 0} \phi(t, x) &= \delta \end{aligned}$$

die für $|x| \to \infty$ genügend schnell abfällt im folgenden Sinn: Für jedes beschränkte offene Intervall $I \subseteq (0, \infty)$ existiert eine Konstante $C > 0$ sodass

$$\begin{aligned} \sup_{(t,x) \in I \times \mathbb{R}} |(1 + x^2) \frac{\partial^n}{\partial x^n}\phi(t, x)| &\leq C \quad , \quad n \in \{0, 1, 2\} \\ \sup_{(t,x) \in I \times \mathbb{R}} |(1 + x^2) \frac{\partial}{\partial t}\phi(t, x)| &\leq C \end{aligned}$$

(a) Sei $u(t, k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\phi(t, x)\, dx$. Zeigen Sie

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, k) = au(t, k) - k^2 u(t, k)$$

für alle $t > 0$.

(b) Bestimmen Sie $u(t, k)$ für $t > 0$.

(c) Bestimmen Sie $\phi(t, x)$ und zeigen Sie, dass es das Anfangswertproblem und die Abfalleigenschaften erfüllt.