Aufgabe 1. Beweisen Sie folgende Aussage. Es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gilt

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| \leq C \left(\|f\|^2_{L^2([0,2\pi])} + \|f'\|^2_{L^2([0,2\pi])} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Zeige, dass die Ungleichung nicht gilt, wenn die L^2 Norm der Ableitung weggelassen wird.
Hinweis: Entwickle f in eine Fourierreihe. Verwende dann die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{a}_n b_n| \leq (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2)^{1/2} (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2)^{1/2}$$

mit $b_n = \frac{1}{1+n^2}$ und den Satz von Parseval (s. Serie 2).
Bemerkung. Dies ist ein einfaches Beispiel einer Sobolev Ungleichung.

Aufgabe 2. Betrachte die Gleichung

$$(-\partial_x^2 + c)u = f$$

mit $f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $c \in [0, \infty)$. Beweise die folgenden Aussagen.

a) Sei $c > 0$. Für jedes f existiert eine eindeutige Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

b) Sei $c = 0$. Der Lösungsraum ist ein eindimensionaler affiner Unterraum von $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ wenn $\int_0^{2\pi} f(s)ds = 0$, er ist leer wenn $\int_0^{2\pi} f(s)ds \neq 0$.

c) Was passiert wenn $c < 0$?

Aufgabe 3. Seien $f, g, h \in L^1(S^1)$. Die Faltung $f * g$ von f mit g ist definiert durch

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)dy$$

Zeigen Sie

a) Die Faltung ist eine bilineare, assoziative, kommutative Abbildung $L^1(S^1) \times L^1(S^1) \to L^1(S^1)$. Insbesondere ist $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$.

b) Drücke die Fourierkoeffizienten von $f * g$ als Funktion der Fourierkoeffizienten von f und g aus.

c) Wenn f oder g eine bestimmte Regularität hat, dann wird diese an die Faltung übertragen, im folgenden Sinne:
Sei $f \in C^k(S^1)$ für ein $k \geq 0$. Dann ist $f * g \in C^k(S^1)$.

Aufgabe 4.

a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sodass für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt $x \mapsto x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\partial^\alpha \hat{f} = \widehat{(-ix)^\alpha f} \qquad \sup_{k\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \hat{f}(k)| < \infty$$

b) Sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sodass für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt $f, \partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\widehat{\partial^\alpha f} = (ik)^\alpha \hat{f} \qquad\qquad \sup_{k \in \mathbb{R}^n} |k^\alpha \hat{f}(k)| < \infty$$

Aufgabe 5.

a) Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation von $e^{-a|x|}$ gleich $\frac{2a}{k^2+a^2}$ ist.

b) Benutzen Sie die Poisson-Summationsformel und a) im Limes $a \to 0$, um $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ zu berechnen.

Aufgabe 6. Verifizieren Sie die folgenden Rechenregeln für die Fouriertransformation. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

a) $(\widehat{\alpha f + \beta g}) = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$.

b) $\widehat{f(\alpha \cdot)}(k) = |\alpha|^{-n} \hat{f}(k/\alpha)$, falls $\alpha \neq 0$.

c) $\hat{f}_y(k) = \hat{f}(k) e^{-iky}$, wobei $f_y(x) = f(x-y)$ und $y \in \mathbb{R}^n$.

d) $f\hat{g}, \hat{f}g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g} dx$

e) $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{\bar{f}}(-k)$

Berechnen Sie die Foureiertransformation folgender Funktionen.

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x e^{-\frac{x^2}{4} + (3i+1)x}$.
Benutzen Sie dazu die obigen Rechenregeln und (4).

g)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ 1 - |x| & \text{sonst} \end{cases}$$