Prof. Dr. Özlem Imamoglu

Musterlösung der Serie 1

Repetition Lineare Algebra

1. Gegeben seien die folgenden zwei Basen von $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\}, \quad \tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{bmatrix}0\\\pi\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-\pi\\0\end{bmatrix} \right\}$$

a.) Sei $v = \begin{bmatrix}0\\1\\\pi\end{bmatrix}$. Berechne den Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und den Koordinatenvektor $[v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ bezüglich der anderen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$.

b.) Sei $w \in \mathbb{R}^3$ mit $[w]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix}-\pi+1\\\pi^2\\\pi\end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von w bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung:

a.) *Erster Lösungsweg:* Wir berechnen zuerst die Transformationsmatrix L bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ und der Basis $\mathcal{B}$. Es gilt per Definition

$$(b_1\ b_2\ b_3) = (e_1\ e_2\ e_3)L$$

und daher ist $L = (b_1\ b_2\ b_3) = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Damit gilt $[v]_{\mathcal{B}} = L^{-1}[v]_{\mathcal{E}} = L^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\\pi\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\\pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1-\pi\\\pi\end{pmatrix}$.

Die Transformationsmatrix $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$ erfüllt die Gleichung

$$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}.$$

Daher ist $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{-1}\tilde{\mathcal{B}}$, wobei $\mathcal{B}^{-1}$ die Inverse der Matrix $(b_1\ b_2\ b_3)$ bezeichnet. Es gilt somit $\mathcal{B}^{-1} = L^{-1}$ mit obigem L. Also gilt

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\\pi&1&-\pi\\1&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\pi&-1&1+\pi\\\pi-1&1&-\pi\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

Nun berechnen wir

$$\Lambda = L^{-1}_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \pi & 1+\pi & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Schlussendlich berechnen wir

$$[v]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \Lambda[v]_{\mathcal{B}} = L^{-1}_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \pi & 1+\pi & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1-\pi \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 1-\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zweiter Lösungsweg: Wir möchten die foldende Koordinatenvektoren finden:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \quad [v]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \tilde{v}^2 \\ \tilde{v}^3 \end{pmatrix}$$

Damit möchten wir die Lösung finden von

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi \end{bmatrix} = v = v^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^1 + v^2 + v^3 \\ v^2 + v^3 \\ v^3 \end{bmatrix}.$$

Aus der obigen Gleichungen folgern wir direkt $v^3 = \pi$, dann $v^2 = 1 - \pi$ und $v^1 = -1$. Für die andere Basis wollen wir, dass das folgende gilt:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi \end{bmatrix} = v = \tilde{v}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ 1 \end{bmatrix} + \tilde{v}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{v}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ -\pi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}^3 \\ \pi\tilde{v}^1 + \tilde{v}^2 - \pi\tilde{v}^3 \\ \tilde{v}^1 \end{bmatrix}$$

Wir folgern direkt $\tilde{v}^1 = \pi$ und $\tilde{v}^3 = 0$. Das impliziert $\tilde{v}^2 = 1 - \pi^2$.

b.) *Erster Lösungsweg:* Es ist $[w]_{\mathcal{B}} = \Lambda^{-1}[w]_{\tilde{\mathcal{B}}} = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}[w]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} -\pi & -1 & 1+\pi \\ \pi-1 & 1 & -\pi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\pi+1 \\ \pi^2 \\ \pi \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \pi^2 - \pi - \pi^2 + \pi + \pi^2 \\ -\pi^2 + 2\pi - 1 - \pi^2 - \pi^2 \\ \pi + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^2 \\ -1 + 2\pi - \pi^2 \\ 1 + \pi \end{pmatrix}.$

Zweiter Lösungsweg: Wenn man die Wechselmatrix nicht berechnen will, hat man es jetzt ein bisschen schwerer. Wir schreiben $[w] = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}$. Dann hat es

$$w = (-\pi + 1) \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ 1 \end{bmatrix} + \pi^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \pi \begin{bmatrix} 1 \\ -\pi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ -\pi^2 + \pi \\ -\pi + 1 \end{bmatrix}$$

und somit erhalten wir

$$\begin{bmatrix} \pi \\ -\pi^2+\pi \\ -\pi+1 \end{bmatrix} = w^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^1+w^2+w^3 \\ w^2+w^3 \\ w^3 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgen wir $w^3 = -\pi+1$, $w^2 = -\pi^2+\pi-(-\pi+1) = -\pi^2+2\pi-1$ und $w^1 = \pi-(-\pi+1)-(-\pi^2+2\pi-1) = \pi^2$.

2. Sei

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

a.) Zeige, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^5$ ist und berechne die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach der Standardbasis $\mathcal{E}$.

b.) Sei $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung: a.) Die Menge $\mathcal{B}$ ist eine Basis, genau wenn die Matrix

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

invertierbar ist. Wenn das der Fall ist, ist die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ die Inverse von $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$. Deshalb berechnen wir die Inverse direkt durch Gauss-Reduktion. Dadurch werden wir selbstverständlich erfahren, dass $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ invertierbar ist.

Es ist

$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 14 & -5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 15 & -5 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -11 & \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -5 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3}
\end{array}\right].
$$

Deshalb ist $\mathcal{B}$ eine Basis und die gewünschte Transformationsmatrix

$$
L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 6 & -2 & 1 \\
-2 & -5 & -33 & 10 & -5 \\
0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -15 & 5 & -1
\end{bmatrix}.
$$

b.) Es ist

$$
[v]_{\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}[v]_{\mathcal{E}} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}v = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 6 & -2 & 1 \\
-2 & -5 & -33 & 10 & -5 \\
0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -15 & 5 & -1
\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -20 \\ 112 \\ 9 \\ 47 \end{bmatrix}.
$$

3. Sei $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ die Standardbasis des Vektorraumes $V := \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$. Sei weiter $\alpha : V \to V$ die Funktion $\alpha(p(x)) := (x-1)p'(x)$, wo $p'(x) := \frac{dp}{dx}(x)$, und $\tilde{\mathcal{B}} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$.

a.) Zeige, dass α linear ist. Beweise, dass $\tilde{\mathcal{B}}$ eine Basis von V ist, die aus Eigenvektoren von α besteht.

b.) Sei $\beta : V \to \mathbb{R}$ die lineare Abbildung $f(x) \mapsto f(1)$. Bestimme die Matrixdarstellung von β bezüglich $\mathcal{B}$ und bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.

c.) Schreib die Transformationsmatrix $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$ und ihre Inverse $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$.

Lösung: a.) Die Abbildung α ist wohl definiert, weil die Ableitung eines Polynoms p noch ein Polynom ist, dessen Grad gleich $\deg(p) - 1$ ist, so dass $\deg((x-1)p') = 1 + \deg(p') = \deg(p) \leqslant 3$. Da die Ableitung linear ist, gilt das folgende für jedes $p, q \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\alpha(p + \lambda q) &= (x-1)(p + \lambda q)' = (x-1)(p' + \lambda q') \\ &= (x-1)p' + \lambda(x-1)q' = \alpha(p) + \lambda\alpha(q).\end{aligned}$$

Deswegen ist α linear.

Ausserdem ist es für jedes $k \in \{1, 2, 3\}$

$$\alpha((x-1)^k) = (x-1) \cdot k(x-1)^{k-1} = k(x-1)^k,$$

d.h., $(x-1)^k$ ist ein Eigenvektor mit Eigenwert k. Dazu ist es $\alpha(1) = 0$, so dass das konstante Polynom 1 ein Eigenvektor mit Eigenwer 0 ist. Dann sind die vier Elemente von $\tilde{\mathcal{B}}$ linear unabhängig und deshalb bilden sie eine Basis des vierdimensionalen Vektorraum V.

b.) Die Matrixdarstellung von β ist bezüglich einer Basis von V und einer Basis von $\mathbb{R}$ definiert. Wir nehmen $\mathcal{E} = \{1\}$ als Basis von $\mathbb{R}$. Um die Matrixdarstellung zu bestimmen, muss man die Bilde der Basiselemente berechnen. Es ist

$$\beta(1) = 1,\ \beta(x^n) = 1,\ \beta((x-1)^n) = 0.$$

Somit berechnen wir die Matrixdarstellungen

$$A_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = [1\ 1\ 1\ 1] \quad A_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{B}}} = [1\ 0\ 0\ 0].$$

c.) Es ist

$$1 = 1,\ x - 1 = -1 + x,\ (x-1)^2 = 1 - 2x + x^2,\ (x-1)^3 = -1 + 3x - 3x^2 + x^3.$$

Deshalb ist die Transformationsmatrix

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Inverse lässt sich einfach als Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$ berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ x &= 1 + (x-1) \\ x^2 &= (1+x-1)^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 \\ x^3 &= (1+x-1)^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3, \end{aligned}$$

aus dem folgern wir

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} = L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^3$ und die Basis

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Bestimme die Matrixdarstellung der Funktion $\psi(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{x}$ bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung: Im Folgenden bezeichnet $\cdot$ das Skalarprodukt zweier Vektoren, welches in $\mathbb{R}^3$ definiert ist durch die Rechenvorschrift

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R} \text{ für alle } \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sei $\overrightarrow{x} = a_1 \overrightarrow{v_1} + a_2 \overrightarrow{v_2} + a_3 (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2})$ ein Vektor in $\mathbb{R}^3$. Dann berechnen wir

$$\begin{aligned} \psi(\overrightarrow{x}) &= \overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{x} \\ &= \overrightarrow{v_2} \times (a_1 \overrightarrow{v_1} + a_2 \overrightarrow{v_2} + a_3 (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2})) \\ &= -a_1 (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) - a_3 (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}) \overrightarrow{v_2} + a_3 \left|\left|\overrightarrow{v_2}\right|\right|^2 \overrightarrow{v_1}. \end{aligned}$$

Oben haben wir die folgenden drei Eigenschaften

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} &= 0 \text{ für alle } \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3, \\ \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} &= -(\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_1}) \text{ für alle } \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^3, \\ \overrightarrow{v_2} \times (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) &= (\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2}) \overrightarrow{v_1} - (\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}) \overrightarrow{v_2} \\ &= \left|\left|\overrightarrow{v_2}\right|\right|^2 \overrightarrow{v_1} - (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}) \overrightarrow{v_2} \text{ für alle } \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

des Kreuzproduktes verwendet. Die letzte dieser Identitäten folgt aus dem Grassmannschen Entwicklungssatz

$$\overrightarrow{v_1} \times (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3}) = (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3}) \overrightarrow{v_2} - (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}) \overrightarrow{v_3} \text{ für alle } \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \in \mathbb{R}^3.$$

Bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ hat $\psi(x)$ den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} a_3\left|\left|\overrightarrow{v_2}\right|\right|^2 \\ -a_3\left(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}\right) \\ -a_1 \end{pmatrix}$ und daher hat es $\mathrm{Mat}_{\psi,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left|\left|\overrightarrow{v_2}\right|\right|^2 \\ 0 & 0 & -\left(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}\right) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, weil gilt

$$B\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left|\left|\overrightarrow{v_2}\right|\right|^2 \\ 0 & 0 & -\left(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}\right) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3\left|\left|\overrightarrow{v_2}\right|\right|^2 \\ -a_3\left(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}\right) \\ -a_1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wenn $\left|\left|\overrightarrow{v_2}\right|\right| = 1$ und $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{v_2} \iff \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} = 0$, ergibt sich die einfachere Lösung

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die obigen zwei Bedingungen an $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ müssen aber nicht erfüllt sein.