# Musterlösung der Serie 10

## Repetition

1. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der Vektorraum der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 3$. Gegeben sind die Basen

$$\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\},\ \tilde{\mathcal{B}} = \{1, 1+x, 1-x+x^2, 1-x+x^2-x^3\}$$

und die lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit Matrixdarstellung

$$A = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Berechne $\varphi(2 - 3x + 4x^2 - x^3)$.

(b) Finde die Transformationsmatrix $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$.

(c) Finde die Eigenwerte von $\varphi$. Ist $\varphi$ diagonalisierbar? [*Hinweis*: Um das charakteristische Polynom von $\varphi$ zu berechnen, braucht man die Matrixdarstellung von $\mathcal{B}$ bezüglich der selben Basis an beiden Seiten.]

*Lösung*:

(a) Sei $\mathcal{E} := \{1, x, x^2, x^3\}$. Per Definition hat es

$$[2 - 3x + 4x^2 - x^3]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Um $\varphi(2-3x+4x^2-x^3)$ durch mittels der gegebenen Matrix $A$ zu berechnen, braucht man die Koordinaten

$$[2 - 3x + 4x^2 - x^3]_{\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} \cdot [2 - 3x + 4x^2 - x^3]_{\mathcal{E}}.$$

Bei Serie 1, Aufgabe 3 haben wir berechnet, dass die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ gleich

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist. Dann gilt es

$$[2-3x+4x^2-x^3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
[\varphi(2-3x+4x^2-x^3)]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \operatorname{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 14 \\ -11 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

was bedeutet, dass

$$\begin{aligned}
&\varphi(2-3x+4x^2-x^3) = 14 \cdot 1 - 11 \cdot (1+x) + 12(1-x+x^2) + (1-x+x^2-x^3) \\
&\quad = 3 - 11x + 12 - 12x + 12x^2 + 1 - x + x^2 - x^3 = 16 - 24x + 13x^2 - x^3.
\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen direkt die Koordinaten der Vektoren von $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot 1 \\
1 + x &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot (x-1) \\
1 - x + x^2 &= (1 - 2x + x^2) + x - 1 + 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (x-1) + (x-1)^2 \\
1 - x + x^2 - x^3 &= -(x-1)(1+x^2) = -(x-1)(1 - 2x + x^2 + 2x - 2 + 2) \\
&= -(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 2(x-1)
\end{aligned}$$

Die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$ ist also durch

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

gegeben.

(c) Wir folgen den Hinweis und berechnen zuerst die Matrixdarstellung $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B})$:

$$\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B},\mathcal{B}) = L^{-1}_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dadurch kann man die Eigenwerte von $\varphi$ bestimmen. Sie sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B},\mathcal{B}) - \lambda\cdot \mathrm{Id}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 3 & 2 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(\lambda + \lambda^2 - 2).$$

Das Polynom $\lambda^2 + \lambda - 2$ hat Nullstellen $\lambda_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}$, d.h., $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$. Insgesamt hat $\varphi$ also zwei Eigenwerte, nämlich 1 (mit Vielfachheit 3) und $-2$ (mit Vielfachheit 1). Die Abbildung $\varphi$ ist dann diagonalisierbar, wenn und nur wenn $\dim(E_1) = \dim(\ker(\varphi - \mathrm{Id})) = 3$. Das ist aber nicht der Fall, da der Eigenraum

$$E_1 : \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (x-1) + 2(x-1)^2 \rangle$$

von der Dimension 1 ist.

2. Gegeben ist der Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 2$, die drei Linearformen auf $V$

$$\beta^0(f(x)) = f(0),\ \beta^1(f(x)) = f'(1),\ \beta^2(f(x)) = f''(2).$$

und die Bilinearform auf $V$

$$\varphi(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{C} = \{\beta^0, \beta^1, \beta^2\}$ eine Basis des Dualvektorraumes $V^*$ von $V$ ist.

(b) Finde eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$, dessen Dualbasis gleich $\mathcal{C}$ ist, d.h., $\mathcal{B}^* = \mathcal{C}$.

(c) Finde die Komponenten von $\varphi$ bezüglich der Basis $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ von $V^* \otimes V^*$.

*Lösung*:

(a) Wie berechnen die Komponenten von $\beta^0, \beta^1$ und $\beta^2$ bezüglich der Dualbasis $\mathcal{E}^*$ der Standardbasis $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$. Sie sind

$$\begin{aligned} [\beta^0]_{\mathcal{E}^*} &= [\beta^0(1) \quad \beta^0(x) \quad \beta^0(x^2)] = [1 \quad 0 \quad 0] \\ [\beta^1]_{\mathcal{E}^*} &= [\beta^1(1) \quad \beta^1(x) \quad \beta^1(x^2)] = [0 \quad 1 \quad 2] \\ [\beta^2]_{\mathcal{E}^*} &= [\beta^2(1) \quad \beta^2(x) \quad \beta^2(x^2)] = [0 \quad 0 \quad 2]. \end{aligned}$$

Die drei obigen Reihenvektoren sind linear unabhängig. Deswegen ist $\mathcal{C}$ eine Basis von $V^*$.

(b) Sei $\mathcal{B}$ die gewünschte Basis und $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ nach $\mathcal{B}$.
Dann die Bedingung $\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$ impliziert für jedes $i \in \{0, 1, 2\}$ die Gleichung von Reihenvektoren

$$[\beta^i]_{\mathcal{C}} = [\beta^i]_{\mathcal{E}} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}.$$

Diese drei Gleichungen kann man zur folgenden Matrixgleichung machen:

$$\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} [\beta^0]_{\mathcal{C}} \\ [\beta^1]_{\mathcal{C}} \\ [\beta^2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\beta^0]_{\mathcal{E}} \\ [\beta^1]_{\mathcal{E}} \\ [\beta^2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}.$$

Somit erhalten wir

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

was bedeutet, dass die gewünschte Basis

$$\mathcal{B} = \left\{1, x, -x + \frac{1}{2}x^2\right\}$$

ist.

(c) Es hat $[\varphi]_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} = [\varphi]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} = [\varphi(b_i, b_j)]_{0\leqslant i,j\leqslant 2}$, wobei $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, b_2\}$ die bei (b) gefundenen Basis von $V$ ist.

Die Dualform ist offensichtlich symmetrisch. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\varphi(1,1) &= \int_{-1}^{1} dx = 2 \\
\varphi(1,x) = \varphi(x,1) &= \int_{-1}^{1} x dx = 0 \\
\varphi(x,x) &= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \\
\varphi\left(1, -x + \frac{1}{2}x^2\right) = \varphi\left(-x + \frac{1}{2}x^2, 1\right) &= \int_{-1}^{1} \left(-x + \frac{1}{2}x^2\right) dx = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\
\varphi\left(x, -x + \frac{1}{2}x^2\right) = \varphi\left(-x + \frac{1}{2}x^2, x\right) &= \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x^3\right) dx = -\frac{2}{3} \\
\varphi\left(-x + \frac{1}{2}x^2, -x + \frac{1}{2}x^2\right) &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{4}x^4 - x^3\right) dx = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{10} = \frac{23}{30}.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$[\varphi]_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{23}{30} \end{bmatrix}.$$

3. Sei $a \in \mathbb{R}$. Gegeben sind die $2 \times 2$ Matrizen

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 0 \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_4 = \begin{bmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die vier obigen Matrizen eine Basis $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bilden, wenn und nur wenn $a \notin \{1, 2\}$.

(b) Nehmen wir an, dass $a = 0$. Sei $g$ das innere Produkt, für welches $\mathcal{B}$ orthonormal ist. Bestimme die Matrixdarstellung $[g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

*Lösung*:

(a) Die vier Matrizen $M_1, M_2, M_3$ und $M_4$ bilden genau eine Basis, wenn ihre Koordinatenvektoren linear unabhängig sind. Das ist der Fall, wenn und nur wenn

$$0 \neq \det \begin{bmatrix} a & 1 & a-2 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -(a-1)\det \begin{bmatrix} a & a-2 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= -(a-1)(2-a),$$

d.h., wenn und nur wenn $a \notin \{1,2\}$.

(b) Die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ ist gegeben durch

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a & 1 & a-2 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung von $g$ bezüglich $\mathcal{E}$ kann durch die folgende Basiswechselformel berechnet werden:

$$[g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^T \cdot [g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} \cdot L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^T \cdot \mathrm{Id} \cdot L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}.$$

Wir berechnen also die Inverse $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Somit erhalten wir

$$[g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Gegeben sind die Vektoren

$$b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ und } b_2 := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

von $\mathbb{R}^2$ und die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ von $\mathbb{R}^2$.

(a) Berechne die Dualbasis $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \beta^2\}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^*$.

(b) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ bezüglich des Standardskalarprodukts $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

*Lösung*:

(a) Sei $\mathcal{E}^* = \{\varepsilon^1, \varepsilon^2\}$ die Dualbasis der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$. Wegen der Kontravarianz der Dualbasiselementen hat es

$$\begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \end{pmatrix} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt es

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

und somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \frac{1}{5}\varepsilon^1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 \\ \beta^2 &= -\frac{2}{5}\varepsilon^1 + \frac{1}{5}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

(b) Sei $\mathcal{B}^g = \{b^1, b^2\}$ die gesuchte Basis. Die Koordinaten von $b^1$ und $b^2$ schreibt man als Reihenvektor. Wir möchten, dass $g(b^i, b_j) = \delta^i_j$ für jedes $i, j \in \{1, 2\}$. Bezüglich der Basis $\mathcal{E}$ erhalten wir

$$\begin{bmatrix} [b^1]_{\mathcal{E}} \\ [b^2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [b_1]_{\mathcal{E}} & [b_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

was heisst, dass

$$\begin{bmatrix} [b^1]_{\mathcal{E}} \\ [b^2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Dann ist die reziproke Basis von $\mathcal{B}$ bezüglich $g$ durch

$$\mathcal{B}^g = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right\}$$

gegeben.