Musterlösung der Serie 11

reziproke Basis, kovariante und kontravariante Koordinaten

1. Gegeben sind die Basen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

und das innere Produkt g auf V, für welches $\mathcal{B}$ orthonormal ist (siehe auch Serie 9, Aufgabe 3). Gegeben ist weiter der Vektor

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimme die kontravarianten und kovarianten Koordinaten von v bezuglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.

(b) Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{BC}}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$ und berechne die reziproke Basis $\mathcal{C}^g$.

(c) Berechne die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{C}$.

Lösung:

(a) Bezüglich $\mathcal{E}$ bezeichnen wir die kontravarianten Koordinaten von v als $[v]_{\mathcal{E}} = [v^i]_{1\leqslant i\leqslant 3}$ und die kovarianten Koordinaten von v als $[v]_{\mathcal{E}^g} = [v_i]_{1\leqslant i\leqslant 3}$, so dass $v = v^i e_i = v_i e^i$ gilt. Die kontravarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{E}$ sind

$$[v]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Wie bei der Serie 9 Aufgabe 3 berechnet, ist die Matrixdarstellung von g bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$[g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} = [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wegen der Beziehung zwischen die kovarianten und kontravarianten Koordinaten von v gilt es

$$v_i = g_{ij} v^j,$$

was bedeutet, dass die Gleichung

$$[v_1 \ v_2 \ v_3]^T = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

gilt. Also sind die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{E}$ durch

$$[v]_{\mathcal{E}^g} = [-2 \quad 3 \quad -3]$$

gegeben.

(b) Es hat

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = L_{\mathcal{E}\mathcal{C}} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = L_{\mathcal{C}\mathcal{E}}^{-1} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}$ orthonormal bezüglich g ist, gilt es $\mathcal{B}^g = \mathcal{B}$. Wir notieren die Basiselemente $\mathcal{C}^g = \{c^1, c^2, c^3\}$. Wegen der Kontravarianz der reziproken Basis hat es dann

$$\begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{bmatrix} = L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}^{-1} \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix} = L_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_1 - \frac{1}{2}b_2 \\ -b_1 + \frac{1}{2}b_2 + b_3 \\ b_1 + \frac{1}{2}b_2 + b_3 \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen die Basiselemente von $\mathcal{C}^g$ explizit:

$$\begin{aligned} c^1 &= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \\ c^2 &= - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \\ c^3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) Wegen der Kovarianz gilt es für jedes $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$([v]_{\mathcal{C}^g})_i = (L_{\mathcal{C}\mathcal{E}})_i^j([v]_{\mathcal{E}^g})_j,$$

was bedeutet, dass die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{C}$ durch

$$[v]_{\mathcal{C}^g} = [v]_{\mathcal{E}^g} \cdot L_{\mathcal{C}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

gegeben sind.

2. Gegeben sind die vier 2×2 Matrizen

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und das innere Produkt g auf $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, das durch $g(A, B) = \operatorname{Spur}(A^T B)$ definiert ist.

(a) Zeige, dass die Standardbasis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ orthonormal bezüglich g ist und dass die Formel

$$g\left(\begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{bmatrix} \right) = a^{11}b^{11} + a^{12}b^{12} + a^{21}b^{21} + a^{22}b^{22}$$

gilt. [*Hinweis:* Serie 7, Aufgabe 4]

(b) Zeige, dass

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\} \text{ und } \tilde{\mathcal{B}} = \{2B_1 - B_2, B_1 - B_4, B_3 + B_4, B_2 + B_3\}$$

Basen von V sind.

(c) Berechne die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$.

(d) Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$ von $\tilde{\mathcal{B}}$ nach $\mathcal{B}$ und die reziproke Basis $\tilde{\mathcal{B}}^g$.

Lösung:

(a) *Erster Lösungsweg*: Für jede $1 \leqslant i, j \leqslant 2$ bezeichnen wir als E_{ij} die 2×2 Matrix, die den Eintrag 1 in der (i, j)-Koordinate trägt und sonst nur Nullen hat. Wir haben bei der Aufgabe 4 der Serie 7 schon bemerkt, dass die Gleichung $g(E_{ij}, E_{k\ell}) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$ für jede $i, j, k, \ell \in \{1, 2\}$ gilt, was bedeutet, dass $\mathcal{E}$ orthonormal bezüglich g ist.

Dann erhalten wir die Formel

$$g\left(\begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{bmatrix}\right) = g\left(a^{ij}E_{ij}, b^{k\ell}E_{k\ell}\right) = a^{ij}b^{k\ell}g\left(E_{ij}, E_{k\ell}\right)$$
$$= a^{ij}b^{k\ell}\delta_{i,k}\delta_{j,\ell} = \sum_{I,J} a^{IJ}b^{IJ} = a^{11}b^{11} + a^{12}b^{12} + a^{21}b^{21} + a^{22}b^{22}.$$

Zweiter Lösungsweg: Mann kann die Formel auch direkt berechnen:

$$\begin{aligned} g\left(\begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{bmatrix}\right) &= \operatorname{Spur}\left(\begin{bmatrix} a^{11} & a^{21} \\ a^{12} & a^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= \operatorname{Spur}\left(\begin{bmatrix} a^{11}b^{11} + a^{21}b^{21} & * \\ * & a^{21}b^{21} + a^{22}b^{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= a^{11}b^{11} + a^{21}b^{21} + a^{21}b^{21} + a^{22}b^{22} \end{aligned}$$

Aus dieser Formel folgert man dann, dass die Gleichung $g(E_{ij}, E_{k\ell}) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$ für alle $i, j, k, \ell \in \{1, 2\}$ gilt, was heisst, dass $\mathcal{E}$ orthogonal zu g ist.

(b) Um zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist, berechnen wir das Determinante der Matriz der Komponenten der Vektoren von $\mathcal{B}$ bezüglich $\mathcal{E}$, dass heisst, $\det(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}})$. Die Menge $\mathcal{B}$ ist eine Basis, wenn und nur wenn $\det(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}) \neq 0$. Es hat

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und daher (Entwicklung auf der letzten Zeile)

$$\det(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}) = +\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Daraus folgern wir, dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist.
Weiter berechnen wir $\det(L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}})$. Wenn dieses Determinante nicht gleich Null ist, ist dann $\tilde{\mathcal{B}}$ eine Basis von V. Per Definition gilt es

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und daher (Spalten-Operation und Entwicklung auf der letzten Zeile)

$$\det(L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}) = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Also ist $\tilde{\mathcal{B}}$ eine Basis.

(c) Da $\mathcal{E}$ orthonormal bezüglich g ist, ist die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{E}$ durch die Identitätsmatrix gegeben. Wir notieren $\mathcal{B}^g = \{B^1, B^2, B^3, B^4\}$. Per Definition gilt es bezüglich der Standarbasis

$$\begin{bmatrix}[B^1]_\mathcal{E}\\ [B^2]_\mathcal{E}\\ [B^3]_\mathcal{E}\\ [B^4]_\mathcal{E}\end{bmatrix} \cdot [g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} \cdot \begin{bmatrix}[B_1]_\mathcal{E} & [B_2]_\mathcal{E} & [B_3]_\mathcal{E} & [B_4]_\mathcal{E}\end{bmatrix} = \mathrm{Id} \iff$$

$$\begin{bmatrix}[B^1]_\mathcal{E}\\ [B^2]_\mathcal{E}\\ [B^3]_\mathcal{E}\\ [B^4]_\mathcal{E}\end{bmatrix} \cdot L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \mathrm{Id} \iff \begin{bmatrix}[B^1]_\mathcal{E}\\ [B^2]_\mathcal{E}\\ [B^3]_\mathcal{E}\\ [B^4]_\mathcal{E}\end{bmatrix} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}.$$

Wir berechnen durch Gauss-Reduktion die Inverse von $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -1 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Also gilt es

$$\begin{bmatrix}[B^1]_\mathcal{E}\\ [B^2]_\mathcal{E}\\ [B^3]_\mathcal{E}\\ [B^4]_\mathcal{E}\end{bmatrix} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -2\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -2\\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir die reziproke Basis

$$\mathcal{B}^g = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) Die gesuchte Transformationsmatrix ist

$$L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Wir berechnen die Inverse von $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ durch die Kofaktormatrix. Es gilt

$$
L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} = \frac{1}{1}
\begin{bmatrix}
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{bmatrix}^T
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Sei $\tilde{\mathcal{B}}^g = \{\tilde{B}^1, \tilde{B}^2, \tilde{B}^3, \tilde{B}^4\}$ die gesuchte reziproke Basis. Wegen der Kontravarianz der reziproken Basis gilt es

$$
\begin{bmatrix} \tilde{B}^1 \\ \tilde{B}^2 \\ \tilde{B}^3 \\ \tilde{B}^4 \end{bmatrix} = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \\ B^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \\ B^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^1 + B^2 - B^3 + B^4 \\ -B^1 - 2B^2 + 2B^3 - 2B^4 \\ -B^1 - 2B^2 + 2B^3 - B^4 \\ B^1 + 2B^2 - B^3 + B^4 \end{bmatrix}.
$$

Wir berechnen

$$
B^1 + B^2 - B^3 + B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

und daher

$$
B^1 + 2B^2 - B^3 + B^4 = B^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & -2 \end{bmatrix}.
$$

Weiter gilt es

$$
\begin{aligned}
-B^1 - 2B^2 + 2B^3 - 2B^4 &= B^1 - 2(B^1 + B^2 - B^3 + B^4) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned}
-B^1 - 2B^2 + 2B^3 - B^4 &= (-B^1 - 2B^2 + 2B^3 - 2B^4) + B^4 \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir alle die Elemente der Basis $\tilde{\mathcal{B}}^g$ gefunden:

$$\tilde{\mathcal{B}}^g = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & -2 \end{bmatrix} \right\}$$

3. Gegeben sind der Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 2$ und seine Basen $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ und $\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, 3 + x, 3x^2\}$.

   Sei g das innere Produkt auf V dessen Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{E}$ gegeben ist durch

   $$G = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 6 & 0 \\ \frac{8}{9} & 0 & \frac{28}{9} \end{bmatrix}.$$

   (a) Wende das Gram-Schmidt Verfahren auf $\mathcal{B}$ an, um eine orthonormale Basis $\mathcal{C}$ von V bezüglich g zu finden. Finde dazu die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{CB}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.

   (b) Bestimme die reziproke Basen $\mathcal{C}^g$ und $\mathcal{B}^g$.

   (c) Bestimme die kovarianten und kontravarianten Koordinaten des Polynoms $f = 3 + x + 3x^2$ bezüglich $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$.

   Lösung:

   (a) Sei $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, c_2\}$ die gesuchte Basis. Um b_0 zu c_0 zu normalisieren, berechnen wir seine Norm:

   $$||b_0|| = \sqrt{g(1 + x + x^2, 1 + x + x^2)} = \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{8}{9} + 6 + \frac{8}{9} + \frac{28}{9}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

   Dann hat es

   $$c_0 := \frac{b_0}{||b_0||} = \frac{1 + x + x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{x^2}{2\sqrt{3}}.$$

   Dann orthogonalisieren wir b_1

   $$\begin{aligned}
   b_1^{\perp} &= (3 + x) - \frac{1}{(2\sqrt{3})^2} g(3 + x, 1 + x + x^2)(1 + x + x^2) = \\
   &= (3 + x) - \frac{1}{12} \cdot \left(3 \cdot \frac{10}{9} + 3 \cdot \frac{8}{9} + 6\right)(1 + x + x^2) \\
   &= 3 + x - 1 - x - x^2 = 2 - x^2,
   \end{aligned}$$

berechnen die Norm

$$||b_1^\perp|| = \sqrt{g(2-x^2, 2-x^2)} = \sqrt{4\cdot\frac{10}{9} - 4\cdot\frac{8}{9} + \frac{28}{9}} = \sqrt{4} = 2.$$

und erhalten daraus

$$c_1 = \frac{b_1^\perp}{||b_1^\perp||} = \frac{2-x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Zum Schluss orthogonalisieren wir

$$\begin{aligned} b_2^\perp &= 3x^2 - g\left(3x^2, 1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{12}g\left(3x^2, 1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2\right) \\ &= 3x^2 - 3\left(\frac{8}{9} - \frac{1}{2}\cdot\frac{28}{9}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{8}{9}+\frac{28}{9}\right)\left(1+x+x^2\right) \\ &= 3x^2 + 2\left(1-\frac{x^2}{2}\right) - \left(1+x+x^2\right) = 1 - x + x^2, \end{aligned}$$

berechnen wir die Norm

$$||b_2^\perp|| = \sqrt{g(1-x+x^2, 1-x+x^2)} = \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{8}{9} + 6 + \frac{8}{9} + \frac{28}{9}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

und normalisieren auf

$$c_2 := \frac{b_2^\perp}{||b_2^\perp||} = \frac{1-x+x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{x^2}{2\sqrt{3}}.$$

Wir haben also die orthonormale Basis

$$\mathcal{C} = \left\{\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2, 1 - \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2\right\}$$

gefunden. Aus dem obigen Verfahren folgern wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{b_0}{2\sqrt{3}} \\ c_1 &= \frac{b_1^\perp}{2} = \frac{b_1 - b_0}{2} = -\frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}b_1 \\ c_2 &= \frac{b_2^\perp}{2\sqrt{3}} = \frac{b_2 + 2c_1 - b_0}{2\sqrt{3}} = \frac{b_2 + b_1 - 2b_0}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}b_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}}b_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}b_2 \end{aligned}$$

Also hat es

$$L_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

(b) Da $\mathcal{C}$ orthonormal bezüglich g ist, gilt es $\mathcal{C} = \mathcal{C}^g$. Weiter gilt es bezüglich $\mathcal{C}$ die Formel

$$\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} [b^0]_{\mathcal{C}} \\ [b^1]_{\mathcal{C}} \\ [b^2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \cdot [g]_{\mathcal{C}} \cdot \begin{bmatrix} [b_0]_{\mathcal{C}} & [b_1]_{\mathcal{C}} & [b_2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [b^0]_{\mathcal{C}} \\ [b^1]_{\mathcal{C}} \\ [b^2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Id} \cdot L_{\mathcal{BC}}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{bmatrix} [b^0]_{\mathcal{C}} \\ [b^1]_{\mathcal{C}} \\ [b^2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = (L_{\mathcal{BC}})^{-1} = L_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

was bedeutet, dass

$$\begin{aligned}
b^0 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2\right) \\
&= \frac{1}{12}(1 + x + x^2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}(1 - x + x^2) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 \\
&= -\frac{7}{12} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x^2 \\
b^1 &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}(1 - x + x^2) \\
&= \frac{7}{12} - \frac{1}{12}x - \frac{1}{6}x^2 \\
b^2 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2\right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{12}x + \frac{1}{12}x^2.
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Wir notieren $[f^i] = [f]_{\mathcal{E}}$ und $[f_i] = [f]_{\mathcal{E}^g}$. Wegen der Beziehung zwischen kontravarianten und kovarianten Koordinaten gilt für die Formel

$$f_i = G_{ij} f^j,$$

was impliziert die Formel

$$[f]^T_{\mathcal{E}^g} = G \cdot [f]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 6 & 0 \\ \frac{8}{9} & 0 & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Kovarianz gilt es

$$([f]_{\mathcal{B}^g})_i = (L_{\mathcal{BE}})_i^j ([f]_{\mathcal{E}^g})_j,$$

was bedeutet, dass

$$[f]_{\mathcal{B}^g} = [f]_{\mathcal{E}^g} \cdot L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 24 & 36 \end{bmatrix}.$$

Da $\mathcal{C}$ orthonormal ist, sind die kontravarianten und kovarianten Koordinaten von f bezüglich $\mathcal{C}$ die selben. Wir suchen dann direkt nach den kontravarianten Koordinaten. Wir bemerken, dass das erste und das letzte Element von $\mathcal{C}$ (nämlich, c_0 und c_2) beide dem Untervektorraum

$$\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in V : a_0 = a_2\}$$

gehören, dem auch f gehört. Dieser Untervektorraum ist durch eine nichttriviale lineare Gleichung definiert und ist daher von der Dimension 2. Also ist er von c_0 und c_2 erzeugt. Dann suchen wir nach $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, die die Bedingung $f = \lambda c_0 + \mu c_2$ erfüllen. Wir erhalten

$$3 + x + 3x^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((\lambda + \mu) + (\lambda - \mu)x + (\lambda + \mu)x^2 \right),$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \lambda - \mu = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

und Lösung $(\lambda, \mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$ hat. Also hat es

$$[f]_{\mathcal{C}^g} = [f]_{\mathcal{C}}^T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$