Musterlösung der Serie 12

Spannungstensoren

1. Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$\sigma = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und die drei Hauptspannungsrichtungen $v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, v_{\sigma_3}$ von σ.

Lösung: Für das charakteristische Polynom $p_\sigma(\lambda)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} p_\sigma(\lambda) &= \det(\sigma - \lambda \mathrm{Id}) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2(-1-\lambda) + 0 + 0 - 0 + \lambda + \lambda \\ &= \lambda^2(-1-\lambda) + 2\lambda = \lambda(-\lambda - \lambda^2 + 2) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+2). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $p_\sigma(\lambda)$ die drei Nullstellen $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 1$ besitzt. Damit erhalten wir für die drei Hauptspannungen $\sigma_1 := \lambda_1, \sigma_2 := \lambda_2, \sigma_3 := \lambda_3$ die folgenden Werte:

$$\sigma_1 = -2, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1.$$

Um die drei Hauptspannungsrichtungen $v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, v_{\sigma_3}$ zu berechnen, müssen wir die Gleichung

$$\sigma v_{\sigma_i} = \sigma_i v_{\sigma_i} \iff (\sigma - \sigma_i \mathrm{Id}) v_{\sigma_i} = 0 \text{ für } i = 1,2,3 \text{ nach } v_{\sigma_i} := \begin{bmatrix} v^1_{\sigma_i} \\ v^2_{\sigma_i} \\ v^3_{\sigma_i} \end{bmatrix} \text{ auflösen.}$$

Mit anderen Wörter suchen wir für jeden Eigenwert von σ nach dem relativen Eigenraum.

Wir berechnen also die Hauptspannungsrichtungen v_{σ_i}:

$$\langle v_{\sigma_1} \rangle = E_{-2} = \ker(\sigma + 2\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\langle v_{\sigma_2}\rangle = E_0 = \ker(\sigma + 2\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\langle v_{\sigma_3}\rangle = E_1 = \ker(\sigma + 2\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zum Beispiel:

$$v_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_{\sigma_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Wieder sei ein Spannungstensor σ bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$\sigma = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimme die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von σ.

(b) Bestimme eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ bezüglich derer σ durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

(c) Bestimme die ersten drei Spannungsinvarianten I_1, I_2 und I_3 (Skript Seite 86) des obigen Spannungstensors σ.

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom $p_\sigma(\lambda)$ von σ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_\sigma(\lambda) = \det(\sigma - \lambda\mathrm{Id}) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 6 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda(1-\lambda)(5-\lambda) - 36(1-\lambda) = (1-\lambda)(-5\lambda + \lambda^2 - 36). \end{aligned}$$

Das Polynom $-5\lambda + \lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 5\lambda - 36$ besitzt die Nullstellen

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} 9 \\ -4. \end{cases}$$

Also besitzt $p_\sigma(\lambda)$ die drei Nullstellen $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 9$.
Die drei Hauptspannungen $\sigma_1 := \lambda_1$, $\sigma_2 := \lambda_2$ und $\sigma_3 := \lambda_3$ von σ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_\sigma(\lambda)$ und sind deshalb durch $\sigma_1 = -4$, $\sigma_2 = 1$ und $\sigma_3 = 9$ gegeben.

(b) Sei $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthonormalbasis mit Transformationsmatrix $O = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$. Sei weiter D die Matrix von σ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Da $\mathcal{E}$ und $\mathcal{B}$ orthonormal sind, ist die Matrix O orthogonal, d.h., $O^{-1} = O^T$. Wegen der Kontravarianz des Spannungstensors gilt es dann

$$D = O^{-1}\sigma(O^{-1})^T = O^{-1}\sigma O.$$

Also ist die Matrix D diagonal, wenn $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren ist. Wir berechnen also die Eigenvektoren v_{σ_i}:

$$\langle v_{\sigma_1}\rangle = E_{-4} = \ker(\sigma + 4\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 3x \\ 0 \\ -2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\langle v_{\sigma_2}\rangle = E_{1} = \ker(\sigma + 4\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\langle v_{\sigma_3}\rangle = E_{9} = \ker(\sigma + 4\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} -9 & 0 & 6 \\ 0 & -8 & 0 \\ 6 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \\ 3x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Also kann man z.B. bei jedem v_{σ_i} den Wert $x = 1$ substituieren, um eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ zu finden. Wir möchten aber eine Orthonormalbasis bestimmen. Deswegen normalisieren wir die Vektoren v_{σ_i}:

$$b_1 = \frac{v_{\sigma_1}}{||v_{\sigma_1}||} = \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}{\sqrt{3^2 + 0 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = \frac{v_{\sigma_2}}{||v_{\sigma_2}||} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \frac{v_{\sigma_3}}{||v_{\sigma_3}||} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bezüglich der Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ hat σ die Diagonalform

$$D = O^{-1}\sigma(O^{-1})^T = O^{-1}\sigma O = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

(c) Die Spannungsinvarianten I_1, I_2 und I_3 erhaltet man aus den Eigenwerten von σ:

$$I_1 = \mathrm{Spur}(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -4 + 1 + 9 = 6$$
$$I_2 = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = -(-4 + 9 - 36) = 31$$
$$I_3 = \det(\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -4 \cdot 1 \cdot 9 = -36$$

Alternativ kann man die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $p_\sigma(\lambda)$ finden und sie mit dem korrekten Vorzeichnen betrachten.

3. Wir bezeichnen einen Spannungstensor σ_S als Scherungsdeformation (shear deformation), wenn dessen Spur gleich 0 ist. Ausserdem bezeichnen wir einen Spannungstensor σ_P als hydrostatischen Druck, falls dessen Hauptspannungen alle gleich sind.

   (a) Zeige, dass ein allgemeiner Spannungstensor σ^{ij} immer als Summe einer Scherungsdeformation σ_S^{ij} und eines hydrostatischen Drucks σ_P^{ij} geschrieben werden kann.

   (b) Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$\sigma = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Schreibe den obigen Spannungstensor σ als Summe einer Scherungsdeformation σ_S und eines hydrostatischen Drucks σ_P.

   (c*) Finde eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ bezüglich derer die bei (b) gefundenen Scherungsdeformation σ_S durch eine Matrix A beschrieben wird, die auf der Diagonale nur Nullen hat:

$$\exists x, y, z \in \mathbb{R} : A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung:

(a) Definiere

$$\sigma_S := \sigma - \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id}.$$

Dann ist σ_S eine Scherungstransformation, denn es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Spur}(\sigma_S) &= \operatorname{Spur}\left(\sigma - \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id}\right) = \operatorname{Spur}(\sigma) - \operatorname{Spur}\left(\frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id}\right) \\ &= \operatorname{Spur}(\sigma) - \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\operatorname{Spur}(\mathrm{Id}) = \operatorname{Spur}(\sigma) - 3\frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma) \\ &= \operatorname{Spur}(\sigma) - \operatorname{Spur}(\sigma) = 0\end{aligned}$$

wegen der Linearität der Spur. Ausserdem hat der Tensor σ_P definiert durch

$$\sigma_P := \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id}$$

offensichtlich lauter gleicher Hauptspannungen, nämlich

$$\sigma_i = \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma) \text{ für alle } i.$$

Deshalb handelt es sich bei σ_P um einen hydrostatischen Druck.
Es gilt zudem

$$\sigma = \left(\sigma - \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id}\right) + \left(\frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id}\right) = \sigma_S + \sigma_P$$

und dies ist eine Zerlegung des allgemeinen Spannungstensors σ in eine Scherungstransformation σ_S und einen hydrostatischen Druck σ_P.

(b) Der gegebene Spannungstensor hat Spur

$$\operatorname{Spur}(\sigma) = \sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33} = -3 + 1 + 5 = 3.$$

Wir definieren also wie oben

$$\sigma_S = \sigma - \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id} = \sigma - \mathrm{Id} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{und } \sigma_P = \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathrm{Id} = \mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Falls die symmetrische $[\sigma_S]_{\mathcal{E}}$ und A die selben Eigenwerte besitzen, dann kann man die beide zur selben diagonalen Matrix orthogonal diagonalisieren. Also bestimmen wir zuerst die Eigenwerte von $[\sigma_S]_{\mathcal{E}}$:

$$\begin{aligned} p_{\sigma_S}(\lambda) &= \det(\sigma_S - \lambda \mathrm{Id}) \\ &= \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \cdot \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 16 - 9) = \lambda(\lambda-5)(\lambda+5). \end{aligned}$$

Wir bestimmen also die Eigenwerte $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 5$ von σ_S. Weiter berechnen wir die Eigenvektoren v_{-5}, v_0, v_5 von σ_S:

$$\begin{aligned} \langle v_{-5} \rangle &= E_{-5} = \ker(\sigma_S + 5\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 3x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \\ \langle v_0 \rangle &= E_0 = \ker(\sigma_S) = \ker \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \\ \langle v_{-5} \rangle &= E_5 = \ker(\sigma_S - 5\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} -9 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 3x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Wir wählen $x = 1$. Normalisiert erhalten wir die Vektoren

$$c_1 = \frac{v_{-5}}{||v_{-5}||} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } c_3 = \frac{v_{-5}}{||v_{-5}||} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

die eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ bilden, bezüglich derer σ_S diagonale Matrixdarstellung besitzt:

$$D = [\sigma_S]_{\mathcal{C}} = L_{\mathcal{CE}}^{-1}[\sigma_S]_{\mathcal{E}}(L_{\mathcal{CE}}^{-1})^T = L_{\mathcal{CE}}^{-1}[\sigma_S]_{\mathcal{E}} L_{\mathcal{CE}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Weiter wollen wir eine Matrix A wie auf der Aufgabe wählen, die die selben Eigenwerte als σ_S besitzt. Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \begin{bmatrix} -\lambda & x & y \\ x & -\lambda & z \\ y & z & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 2xyz + (x^2 + y^2 + z^2)\lambda.$$

Die Matrix A hat Eigenwerte $-5, 0, 5$, wenn und nur wenn sie Nullstellen von $p_A(\lambda)$ sind, was äquivalent zu den folgenden Gleichungen ist:

$$\begin{cases} 0 + 2xyz + 0 = 0 \\ 125 + 2xyz - 5(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \\ -125 + 2xyz + 5(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xyz = 0 \\ 5(x^2 + y^2 + z^2) = -125 \end{cases}$$

Zum Beispiel erfüllt A mit $x = z = 0$ und $y = 5$ die obigen Bedingungen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man kann die Transformationsmatrix im Skript auf der Seite 85 finden, die A zu D macht. Wir berechnen sie aber direkt, indem wir die Eigenvektoren von A bezüglich der gewünschten Basis $\mathcal{B}$ berechnen.

$$\ker(A + 5\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \{x(b_1 - b_3) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\ker(A) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{x b_2 : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\ker(A - 5\mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \{x(b_1 + b_3) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Wir können dann annehmen, dass die normalisierten Eigenvektoren genau gleich c_1, c_2, c_3 sind. Also gilt es

$$c_1 = \frac{b_1 - b_3}{||b_1 - b_3||} = \frac{b_1 - b_3}{\sqrt{2}}, \qquad c_2 = b_2 \quad \text{und} \quad c_3 = \frac{b_1 + b_3}{||b_1 + b_3||} = \frac{b_1 + b_3}{\sqrt{2}}.$$

Schlussendlich berechnen wir

$$\begin{aligned}
b_1 &= \left(\frac{b_1 - b_3}{2} + \frac{b_1 + b_3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{b_1 - b_3}{\sqrt{2}} + \frac{b_1 + b_3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 + c_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \\
b_2 &= c_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{und} \\
b_3 &= \left(-\frac{b_1 - b_3}{2} + \frac{b_1 + b_3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b_1 - b_3}{\sqrt{2}} + \frac{b_1 + b_3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_1 + c_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\0\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ hat σ_S Matrixdarstellung A (mit $x = z = 0$ und $y = 0$). Zur unserer Beruhigung berechnen wir $[\sigma_S]_{\mathcal{B}}$ wieder:

$$\begin{aligned}
[\sigma_S]_{\mathcal{B}} &= L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}[\sigma_S]_{\mathcal{E}}(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1})^T = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^T[\sigma_S]_{\mathcal{E}}L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \\
&= \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 0 & 2\sqrt{5}\\ 0 & 0 & 0\\ 2\sqrt{5} & 0 & \sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$