Prof. Dr. Özlem Imamoglu

Musterlösung der Serie 13

Repetition

1. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \; b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Weiter ist der Vektor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ gegeben, sowie die Linearabbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die $b_1 \mapsto b_2 + b_3$ bzw. $b_2 \mapsto b_1 + b_3$ bzw. $b_3 \mapsto b_1 + b_2$ schickt.

(a) Bestimme die Matrixdarstellung von φ bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Bestimme eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Abbildung φ diagonale Matrixdarstellung besitzt.

(c) Berechne $\varphi(v)$.

(d) Berechne die Dualbasis $\mathcal{B}^*$ von $\mathcal{B}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^*$ von $(\mathbb{R}^3)^*$.

Lösung:

(a) Bezüglich $\mathcal{B}$ hat φ Matrixdarstellung

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \big[[\varphi(b_1)]_{\mathcal{B}} \quad [\varphi(b_2)]_{\mathcal{B}} \quad [\varphi(b_3)]_{\mathcal{B}}\big] = \big[[b_2+b_3]_{\mathcal{B}} \quad [b_1+b_3]_{\mathcal{B}} \quad [b_1+b_2]_{\mathcal{B}}\big]$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Man kann die folgenden Gleichungen aus den Symmetrien erraten:

$$\begin{aligned} \varphi(b_1+b_2+b_3) &= b_2+b_3+b_1+b_3+b_1+b_2 = 2(b_1+b_2+b_3), \\ \varphi(b_1-b_2) &= b_2+b_3-b_1-b_3 = b_2-b_1 = -(b_1-b_2), \\ \varphi(b_2-b_3) &= b_1+b_3-b_1-b_2 = b_3-b_2 = -(b_2-b_3). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die drei Vektoren $b_1+b_2+b_3$, b_1-b_2 und b_2-b_3 Eigenvektoren sind. Sie bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$, da die Determinante der Matrix ihrer Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

gleich $1+1+1+1=4\neq 0$ besitzt. Also ist die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Basis

$$\mathcal{C} = \{b_1+b_2+b_3, b_1-b_2, b_2-b_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

durch die Diagonale Matrix

$$[\varphi]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

gegeben.

Alternativ kann man die Eigenwerte von φ als Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen und daher Eigenwerte von φ finden:

$$p_\varphi(\lambda) = \det([\varphi]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda.$$

Wir erraten die Nullstelle $\lambda_1 = -1$ und berechnen weiter den Quotient

$$\frac{p_\varphi(\lambda)}{\lambda+1} = \frac{-\lambda^3+3\lambda+2}{\lambda+1} = -\lambda^2+\lambda+2,$$

der Nullstellen $\lambda_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1\pm 3}{-2}$ besitzt. Also sind die Eigenwerte von φ gleich $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$. Wir berechnen die Eigenräume bezüglich der Basis $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \ker([\varphi]_{\mathcal{B}} + \mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ x = x^i b_i : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \\ &= \langle b_1 - b_2, b_2 - b_3 \rangle \\ E_2 &= \ker([\varphi]_{\mathcal{B}} + \mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \ni b_1 + b_2 + b_3 \end{aligned}$$

und erhalten wieder eine Basis von Eigenvektoren von φ, nämlich $\{b_1-b_2, b_2-b_3, b_1+b_2+b_3\}$.

(c) Die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ ist gegeben durch

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Kontravarianz der Koordinaten ist der Spaltenvektor $[v]_\mathcal{B}$ der Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$[v]_\mathcal{B} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}[v]_\mathcal{E}.$$

Wir berechnen die Inverse von $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ durch Gauss-Reduktion:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Dann gilt es

$$[v]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

und daher

$$[\varphi(v)]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Wir finden dann

$$\varphi(v) = 4b_1 + 7b_2 + 3b_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ -12 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

(d) Wegen der Kontravarianz der Dualbasis gilt es $\beta^i = \Lambda^i_j \varepsilon^j$, wobei Λ die bei (c) gefundene Inverse von $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ ist und $\mathcal{E}^* = \{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ die Standardbasis von $(\mathbb{R}^3)^*$ bezeichnet. Also gilt die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \end{bmatrix}$$

was explizit heisst

$$\begin{aligned} \beta^1 &= -2\varepsilon^1 + \varepsilon^2 \\ \beta^2 &= \varepsilon^1 + \varepsilon^3 \\ \beta^3 &= \varepsilon^2 + \varepsilon^3. \end{aligned}$$

2. Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Reflexion an der Linie ℓ gegeben durch

$$x - y + z = 2x - 3y = 0.$$

Finde die Matrixdarstellung $[\psi]_{\mathcal{E}}$ von ψ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Lösung: Die Pünkte $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, die auf ℓ liegen, müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} z &= y - x \\ y &= \frac{2}{3}x \end{aligned}$$

erfüllen. Für $x = 3$ finden wir den Vektor $b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \ell$. Es hat dann $\psi(b_1) = b_1$, da b_1 auf ℓ liegt.

Sei weiter π die Ebene durch den Ursprung, die orthogonal zu ℓ ist. Wir wissen, dass für jeden Vektor $v \in \pi$ die Gleichung $\psi(v) = -v$ gilt. Der Ebene π ist durch

$$b_1^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \iff 3x + 2y - z = 0.$$

definiert. Zum Beispiel enthält π die zwei Vektoren $b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.
Dann ist $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$, da die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinante $-27 - 3 - 12 = -42 \neq 0$ besitzt und daher invertierbar ist. Ihre Inverse ist

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = -\frac{1}{42} \begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \\ -6 & 10 & 2 \\ -3 & -2 & -13 \end{bmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ ist

$$[\psi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Daraus folget, dass die Matrixdarstellung von ψ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ gegeben ist durch

$$
\begin{aligned}
[\psi]_{\mathcal{E}} &= L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1}[\psi]_{\mathcal{B}} L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[\psi]_{\mathcal{B}} L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \\
&= -\frac{1}{42}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \\ -6 & 10 & 2 \\ -3 & -2 & -13 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{42}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \\ 6 & -10 & -2 \\ 3 & 2 & 13 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{42}\begin{bmatrix} -12 & -36 & 18 \\ -36 & 18 & 12 \\ 18 & 12 & 36 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

3. (a) Seien $A = (A^i_j)$ und $B = (B^i_j)$ zwei $n \times n$ Matrizen, wobei der obenstehende Index als Zeilenindex, der unterstehende als Spaltenindex gilt. Beweise die Gleichung

$$A^i_j B^j_i = \mathrm{Spur}(AB).$$

(b) Definiert ist weiter das Kronecker-Delta

$$\delta^{ij} = \delta^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ordne jeden Term auf der linken Seite dem gleichwertigem Term auf der rechten Seite zu:

v. $A^i_k \delta^k_i \delta^\ell_j B^j_\ell$	e. $\mathrm{Spur}((A^T)B)$
vi. $A^i_k \delta^j_\ell \delta^\ell_j B^k_i$	f. $n \cdot \mathrm{Spur}(AB)$
vii. $A^i_j \delta^{j\ell} \delta_{\ell k} B^k_i$	g. $\mathrm{Spur}(A) \cdot \mathrm{Spur}(B)$
viii. $A^k_\ell \delta^{i\ell} \delta_{jk} B^j_i$	h. $\mathrm{Spur}(AB)$

Lösung:

(a) Es hat

$$\mathrm{Spur}(AB) = \sum_{I=1}^{n} (AB)^I_I \overset{(*)}{=} \sum_{I=1}^{n}\sum_{J=1}^{n} A^I_J B^J_I = A^i_j B^j_i,$$

wobei die Gleichung $(*)$ per Definition des Produktes von zwei Matrizen gilt.

(b) Wir berechnen

$$A^i_k \delta^k_i \delta^\ell_j B^j_\ell \overset{(**)}{=} A^i_i B^j_j = \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n A^I_I B^J_J = \left(\sum_{I=1}^n A^I_I\right) \left(\sum_{J=1}^n B^J_J\right) = \operatorname{Spur}(A)\operatorname{Spur}(B).$$

Bei $(**)$ haben wir berücksichtig, dass der Term $A^I_K \delta^K_I \delta^L_J B^J_L$ nicht Null ist, wenn und nur wenn $I = K$ und $L = J$ gelten, auf welchem Fall dieser Term gleich $A^I_I B^J_J$ ist.
Weiter berechnen wir

$$A^i_k \delta^j_\ell \delta^\ell_j B^k_i = A^i_k B^k_i \delta^j_j \overset{(a)}{=} \operatorname{Spur}(AB) \cdot \sum_{J=1}^n \delta^J_J = \operatorname{Spur}(AB) \cdot \sum_{J=1}^n 1 = n \cdot \operatorname{Spur}(AB)$$

und

$$A^i_j \delta^{j\ell} \delta_{\ell k} B^k_i = A^i_j \delta^j_k B^k_i \overset{(***)}{=} A^i_j B^j_i \overset{(a)}{=} \operatorname{Spur}(AB),$$

wobei die Gleichung $(* * *)$ gilt, weil der Summand $A^I_J \delta^J_K B^K_I$ Null ist, wenn J nicht gleich K ist.
Also gelten die Gleichungen

$$\text{v.} = \text{g.}, \ \text{vi.} = \text{f.}, \ \text{vii.} = \text{h.}$$

und daher sollte die Gleichung viii. = e. auch gelten. Die ist angeblich die komplizierte zu beweisen. Man kann die Notation $A^{uv} := A^u_v$ und $B_{uv} := B^u_v$ verwenden, so dass die Indexstellung respektiert werden kann:

$$\begin{aligned} A^k_\ell \delta^{i\ell} \delta_{jk} B^j_i &= A^k_\ell \delta^{\ell i} \delta_{kj} B^j_i \quad (\text{Symmetrien } \delta^{uv} = \delta^{vu} \text{ und } \delta_{uv} = \delta_{vu}) \\ &= A^{ki} B_{ki} \quad (\text{Definition von } \delta) \\ &= (A^T)^{ik} B_{ki} = (A^T B)^i_i = \sum_{I=1}^n (A^T B)^I_I = \operatorname{Spur}(A^T B). \end{aligned}$$

4. Gegeben sind die Matrizen

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und die Linearformen auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2 Matrizen

$$\begin{aligned} \beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta^4 &: V \to \mathbb{R} \\ \beta^1 \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) &= d \\ \beta^2 (A) &= \operatorname{Spur}(E_2 \cdot A) \\ \beta^3 (A) &= \operatorname{Spur}(A \cdot E_3 - E_1 \cdot A) \\ \beta^4 (A) &= \operatorname{Spur}(2A \cdot E_3 - E_1 \cdot A). \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass die Linearformen $\beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta^4$ eine Basis $\mathcal{C} = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta^4\}$ des Dualvektorraums V^* bilden.

(b) Finde die Basis $\mathcal{B}$ von V, deren Dualbasis gleich $\mathcal{C}$ ist.

(c) Bestimme die Koordinaten der Linearform $\mathrm{Spur} : V \to \mathbb{R}$ bezüglich $\mathcal{C}$.

(d) Bestimme die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*$ der Bilinearform

$$\gamma : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$\gamma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) = ab' - ca' + dd'.$$

Lösung:

(a) Wir bestimmen die Koordinaten von jedem β^i bezüglich der Dualbasis $\mathcal{E}^*$ von $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$. Sie sind durch die Werte von β^i auf den Basisvektoren von E_j gegeben. Wir berechnen also

$$\begin{aligned}
&\beta^1(E_1) = \beta^1(E_2) = \beta^1(E_3) = 0\\
&\beta^1(E_4) = 1\\
&\beta^2(E_1) = \mathrm{Spur}(E_2 \cdot E_1) = \mathrm{Spur}(0) = 0\\
&\beta^2(E_2) = \mathrm{Spur}(E_2 \cdot E_2) = \mathrm{Spur}(0) = 0\\
&\beta^2(E_3) = \mathrm{Spur}(E_2 \cdot E_3) = \mathrm{Spur}(E_1) = 1\\
&\beta^2(E_4) = \mathrm{Spur}(E_2 \cdot E_4) = \mathrm{Spur}(E_2) = 0\\
&\beta^3(E_1) = \mathrm{Spur}(E_1 \cdot E_3 - E_1 \cdot E_1) = \mathrm{Spur}(0 - E_1) = -1\\
&\beta^3(E_2) = \mathrm{Spur}(E_2 \cdot E_3 - E_1 \cdot E_2) = \mathrm{Spur}(E_1 - E_2) = 1\\
&\beta^3(E_3) = \mathrm{Spur}(E_3 \cdot E_3 - E_1 \cdot E_3) = \mathrm{Spur}(0 - 0) = 0\\
&\beta^3(E_4) = \mathrm{Spur}(E_4 \cdot E_3 - E_1 \cdot E_4) = \mathrm{Spur}(E_3 - 0) = 0\\
&\beta^4(E_1) = \mathrm{Spur}(0 - E_1) = -1\\
&\beta^4(E_2) = \mathrm{Spur}(2E_1 - E_2) = 2\\
&\beta^4(E_3) = \mathrm{Spur}(0 - 0) = 0\\
&\beta^4(E_4) = \mathrm{Spur}(2E_3 - 0) = 0
\end{aligned}$$

und finden daher die Koordinaten

$$[\beta^1]_{\mathcal{E}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [\beta^2]_{\mathcal{E}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$[\beta^3]_{\mathcal{E}^*} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\beta^4]_{\mathcal{E}^*} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Linearformen $\beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta^4$ bilden eine Basis, weil die Matrix ihrer Komponenten

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

invertierbar ist, da ihre Determinante gleich $-1 \cdot 1 \cdot (-2+1) = 1 \neq 0$ ist.

(b) Wegen der Kontravarianz der Dualbasis muss es $\beta^i = \Lambda^i_j \varepsilon^j$, wobei $\Lambda = L^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ die Inverse der Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ ist und $\mathcal{E}^* = \{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4\}$ der Dualbasis von $\mathcal{E}$ ist.

Die Komponenten von jedem β^i bezüglich $\mathcal{E}^*$ haben wir schon bei (a) gefunden. Es gilt nämlich die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \\ \beta^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \\ \varepsilon^4 \end{bmatrix}.$$

Also hat es

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Wir berechnen die Inverse von Λ durch Gauss-Reduktion

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

und finden

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren dieser Matrix sind die Komponenten von den Basisvektoren von $\mathcal{B}$ bezüglich der Standardbasis. Somit erhalten wir

$$\mathcal{B} = \{E_4, E_3, -2E_1 - E_2, E_1 + E_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Die Koordinante einer Linearform bezüglich der Basis $\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$ sind gleich den Werten von der Linearform auf den Basiselementen von $\mathcal{B}$. Also hat es

$$\begin{aligned} [\mathrm{Spur}]_{\mathcal{C}} &= [\mathrm{Spur}(E_4) \;\; \mathrm{Spur}(E_3) \;\; \mathrm{Spur}(-2E_1 - E_2) \;\; \mathrm{Spur}(E_1 + E_2)] \\ &= [1 \;\; 0 \;\; -2 \;\; 1]\,. \end{aligned}$$

(d) Wir berechnen zuerst die Matrixdarstellung von γ bezüglich $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$. Sie ist

$$[\gamma]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} = [\gamma(E_i, E_j)]_{1\leqslant i,j\leqslant 4}.$$

Per Definition gilt es $\gamma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) = ab' - ca' + dd'$. Da wir γ nur auf den Matrizen E_i berechnen wollten, beschränken wir uns auf die folgenden Fälle:

- $a = 1$. Es hat $b = c = d = 0$. Dann hat γ nicht Wert Null, wenn und nur wenn $b' = 1$ und $a' = c' = d' = 0$.
- $b = 1$. Es hat $a = c = d = 0$ und daher hat γ Wert Null.
- $c = 1$. Es gilt dann $a = b = d = 0$. Also ist der Wert von γ nicht Null, wenn und nur wenn $a' = 1$ und $b' = c' = d' = 0$.
- $d = 1$. Es gilt dann $a = b = d = 0$. Der Wert von γ ist nicht Null, wenn und nur wenn $d' = 1$ und $a' = b' = c' = 0$.

Insgesamt gilt es das Folgendes:

$$\gamma(E_i, E_j) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = 1 \text{ und } j = 2 \\ -1 & \text{wenn } i = 3 \text{ und } j = 1 \\ 1 & \text{wenn } i = 4 \text{ und } j = 4 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

was heisst, dass die Matrixdarstellung von γ bezüglich $\mathcal{E}$ durch

$$[\gamma]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gegeben ist. Wegen der Kovarianz der Komponenten einer Bilinearform gilt es dann

$$\begin{aligned} [\gamma]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^T [\gamma]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der Vektorraum der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 3$ und $\varphi : V \to V$ die lineare Abbildung, die durch

$$\varphi(f) = f(x-1) - xf'(x).$$

definiert ist. Gegeben sind die Basen $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\}$ und $\mathcal{B} = \{-x+1, 2x+1, x^3 - x^2, x^3 + 1\}$ von V.

(a) Bestimme die Matrixdarstellung $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{E})$.

(b) Schreibe die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$.

(c) Bestimme die Eigenwerte von φ.

Lösung:

(a) Wir berechnen die Werte von φ auf der Basis $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\varphi(-x+1) &= -(x-1) + 1 - x \cdot (-1) = 2 \\
\varphi(2x+1) &= 2(x-1) + 1 - x \cdot 2 = -1 \\
\varphi(x^3 - x^2) &= (x-1)^3 - (x-1)^2 - x(3x^2 - 2x) \\
&= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^2 + 2x - 1 - 3x^3 + 2x^2 \\
&= -2 + 5x - 2x^2 - 2x^3 \\
\varphi(x^3 + 1) &= (x-1)^3 + 1 - x(3x^2) = 3x - 3x^2 - 2x^3
\end{aligned}$$

Wir notieren $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Dann hat es

$$\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \left[[\varphi(b_1)]_{\mathcal{E}} \quad [\varphi(b_2)]_{\mathcal{E}} \quad [\varphi(b_3)]_{\mathcal{E}} \quad [\varphi(b_4)]_{\mathcal{E}} \right] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Wir versuchen, die Basisvektoren $1, x, x^2, x^3$ als Linearkombinationen von b_1, b_2, b_3, b_4 zu schreiben.
Es gilt

$$\begin{aligned}
(2x+1) - (-x+1) &= 3x \\
2(-x+1) + (2x+1) &= 3 \\
-(x^3 - x^2) + (x^3 + 1) &= x^2 + 1.
\end{aligned}$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{2}{3}(-x+1) + \frac{1}{3}(2x+1) \\
x &= -\frac{1}{3}(-x+1) + \frac{1}{3}(2x+1) \\
x^2 &= x^2 + 1 - 1 = -(x^3 - x^2) + (x^3 + 1) - \frac{2}{3}(-x+1) - \frac{1}{3}(2x+1) \\
x^3 &= x^3 + 1 - 1 = (x^3 + 1) - \frac{2}{3}(-x+1) - \frac{1}{3}(2x+1)
\end{aligned}$$

Also ist die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ gegeben durch

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [e_1]_{\mathcal{B}} & [e_2]_{\mathcal{B}} & [e_3]_{\mathcal{B}} & [e_4]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Um die Eigenwerte von φ zu finden, müssen wir eine Matrixdarstellung von φ bezüglich der selben Basis an beiden Seiten berechnen. Wegen der Transformationsregel für lineare Abbildungen, gilt es

$$\begin{aligned} [\varphi]_{\mathcal{B}} &= \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{E}) = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{E}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} p_\varphi = \det(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id}) &= \det \begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -5-\lambda \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{4}{3} - \lambda\right) \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} - \lambda & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} - \frac{2}{3} \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(\left(\frac{4}{3} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{3} - \lambda\right) + \frac{4}{9}\right) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{4}{9} - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3}\lambda + \lambda^2 + \frac{4}{9}\right)(-10 - 2\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 12) \\ &= \left(-\lambda + \lambda^2\right)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von φ sind die Nullstellen von p_φ, nämlich $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_1 = 1$.

6. Sei V ein Vektorraum der Dimension n mit den zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ und sei $L = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$. Sei weiter wie üblich $\Lambda = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} = L^{-1}$.

   (a) Bescreibe in der Einsteinschen Summenkonvention das Transformationsverhalten eines Tensor T

      i. vom Typ $(0, 1)$ mit Koordinaten T_i bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{T}_i$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

      ii. vom Typ $(2, 0)$ mit Koordinaten T^{ij} bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{T}^{ij}$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

iii. vom Typ $(1,3)$ mit Koordinaten T^h_{ijk} bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{T}^h_{ijk}$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

(b) Welche der folgenden indizierten Grössen U, X, Y, Z besitzen das Transformationsverhalten eines Tensors in der Einsteinschen Summenkonvention? Wenn die Antwort ja ist, bestimme den Typ des Tensors. Begründe alle deine Antworte.

v. $\tilde{U}_{ij} = L^k_i L^\ell_j U_{k\ell}$

vi. $\tilde{X}^{ijk} = L^i_q L^j_r \Lambda^k_s X^{qrs}$

vii. $\Lambda^k_i \tilde{Y}^{ij} = \Lambda^j_r Y^{kr}$

viii. $\tilde{Z}^i_j = \Lambda^i_k L^\ell_j L^p_q \Lambda^q_\ell Z^k_p$

Lösung:

(a) i. Wenn T ein Tensor vom Typ $(0,1)$ ist, gilt $\tilde{T}_i = L^j_i T_j$.

ii. Wenn T ein Tensor vom Typ $(2,0)$ ist, gilt $\tilde{T}^{ij} = \Lambda^i_k \Lambda^j_\ell T^{k\ell}$.

iii. Wenn T ein Tensor vom Typ $(1,3)$ ist, gilt $\tilde{T}^h_{ijk} = \Lambda^h_p L^q_i L^r_j L^s_k T^p_{qrs}$.

(b) v. Ja. U besitzt das Transformationsverhalten einer Bilinearform, das heisst, eines (kovariante) $(0,2)$-Tensors.

vi. Nein, X ist kein Tensor, da die Indizes i, j auf der linken Seite kontravariant sind, aber dieselben Indizes i, j sich auf der rechten Seite kovariant verhalten.

vii. Nein. Es gilt

$$\begin{aligned} \Lambda^k_i \tilde{Y}^{ij} = \Lambda^j_r Y^{kr} &\iff L^q_k \Lambda^k_i \tilde{Y}^{ij} = L^q_k \Lambda^j_r Y^{kr} \iff (L\Lambda)^q_i \tilde{Y}^{ij} = L^q_k \Lambda^j_r Y^{kr} \\ &\iff \delta^q_i \tilde{Y}^{ij} = L^q_k \Lambda^j_r Y^{kr} \iff \tilde{Y}^{qj} = L^q_k \Lambda^j_r Y^{kr}. \end{aligned}$$

Der Index q ist auf der linken Seite kontravariant, aber er verhält sich auf der rechten Seite kovariant. Deshalb ist Y kein Tensor.

viii. Ja. Die gegebene Formel kann vereinfacht werden zur Formel

$$\tilde{Z}^i_j = \Lambda^i_k L^\ell_j L^p_q \Lambda^q_\ell Z^k_p = \Lambda^i_k L^\ell_j (L\Lambda)^p_\ell Z^k_p = \Lambda^i_k L^\ell_j \delta^p_\ell Z^k_p = \Lambda^i_k L^\ell_j Z^k_\ell,$$

die beschreibt das Transformationsverhalten eines $(1,1)$-Tensors.

7. Gegeben sind die zwei Basen von $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und das innere Produkt g auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$, für welches $\mathcal{C}$ orthonormal ist.

(a) Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{CB}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.

(b) Bestimme die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{B}$.

(c) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ bezüglich g.

(d) Bestimme die kovarianten und kontravarianten Koordinaten von A bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung:

(a) Wir notieren die Basiselemente von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ C_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Um die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{CB}}$ zu bestimmen, brauchen wir die Koordinaten jeder Matrix C_i bezüglich $\mathcal{B}$. Die Matrizen C_i lassen sich leicht als Linearkombination der Matrizen B_j schreiben:

$$\begin{aligned} C_1 &= B_1 - B_2 \\ C_2 &= B_3 + B_4 \\ C_3 &= B_3 - 2B_4 \\ C_3 &= B_2 + B_3. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$

$$L_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Bezüglich der Orthonormalbasis $\mathcal{C}$ hat g Matrixdarstellung $[g]_{\mathcal{C}^*\otimes\mathcal{C}^*} = \mathrm{Id}$. Wegen der Kovarianz der Koordinaten einer Bilinearform gilt die Formel

$$[g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} = L_{\mathcal{BC}}^T \cdot \mathrm{Id} \cdot L_{\mathcal{BC}} = (L_{\mathcal{CB}}^{-1})^T \cdot (L_{\mathcal{CB}})^{-1}.$$

Die Inverse von $L_{\mathcal{CB}}$ berechnen wir durch Gauss-Reduktion:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dann gilt es

$$[g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 23 & 14 & -5 & -1 \\ 14 & 14 & -5 & -1 \\ -5 & -5 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Wir notieren $\mathcal{B}^g = \{B^1, B^2, B^3, B^4\}$. Bezüglich $\mathcal{C}$ muss es gelten

$$\begin{bmatrix} [B^1]_\mathcal{C} \\ [B^2]_\mathcal{C} \\ [B^3]_\mathcal{C} \\ [B^4]_\mathcal{C} \end{bmatrix} \cdot [g]_{\mathcal{C}^*\otimes\mathcal{C}^*} \cdot \begin{bmatrix} [B_1]_\mathcal{C} & [B_2]_\mathcal{C} & [B_3]_\mathcal{C} & [B_4]_\mathcal{C} \end{bmatrix} = \mathrm{Id},$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{bmatrix} [B^1]_\mathcal{C} \\ [B^2]_\mathcal{C} \\ [B^3]_\mathcal{C} \\ [B^4]_\mathcal{C} \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Id} \cdot L_{\mathcal{BC}} = \mathrm{Id}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{bmatrix} [B^1]_\mathcal{C} \\ [B^2]_\mathcal{C} \\ [B^3]_\mathcal{C} \\ [B^4]_\mathcal{C} \end{bmatrix} = L_{\mathcal{BC}}^{-1} = L_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also sind die Matrizen B^i gegeben durch

$$B^1 = C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = -C_1 + C_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = C_2 + C_3 + C_4 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^4 = C_2 - 2C_3 = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Alternativ kann man die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ bezüglich $\mathcal{B}$ berechnen:

$$\begin{bmatrix} [B^1]_\mathcal{B} \\ [B^2]_\mathcal{B} \\ [B^3]_\mathcal{B} \\ [B^4]_\mathcal{B} \end{bmatrix} \cdot [g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} \cdot \begin{bmatrix} [B_1]_\mathcal{B} & [B_2]_\mathcal{B} & [B_3]_\mathcal{B} & [B^4]_\mathcal{B} \end{bmatrix} = \mathrm{Id}$$

$$\iff \begin{bmatrix} [B^1]_\mathcal{B} \\ [B^2]_\mathcal{B} \\ [B^3]_\mathcal{B} \\ [B^4]_\mathcal{B} \end{bmatrix} = [g]^{-1}_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} = ((L_{\mathcal{CB}}^{-1})^T L_{\mathcal{CB}}^{-1})^{-1} = L_{\mathcal{CB}} \cdot L_{\mathcal{CB}}^T.$$

(d) Wir suchen zuerst nach den kontravarianten Koordinaten von A bezüglich $\mathcal{B}$. Diese sind durch die Koeffizienten $a^1, \ldots, a^4 \in \mathbb{R}$ gegeben, für welche die Gleichung $A = a^i B_i$ gilt. Es hat dann

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A = a^i B_i = \begin{bmatrix} -a^1 + a^3 & a^1 + a^4 \\ a^2 - a^4 & -a^2 + a^3 \end{bmatrix},$$

was gilt, wenn und nur wenn $a^1 = a^3 = a^2 = a^4$ und daher $a^1 = a^4 = 1$ gelten. Also sind die kontravarianten Koordinaten von A bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Beziehung zwischen kovarianten und kontravarianten Koordinaten gilt es $[A]_{\mathcal{B}^g} = [a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4]$, wobei die a_i sind durch

$$a_i = g_{ij} a^j$$

definiert. Hier bezeichnen wir den (i, j)-te Eintrag von $[g]_{\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*}$ als g_{ij}. Somit erhalten wir

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = [g]_{\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*} \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 23 & 14 & -5 & -1 \\ 14 & 14 & -5 & -1 \\ -5 & -5 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{9} \\ \frac{22}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

8. Wir bezeichnen einen Spannungstensor σ_S als Scherungsdeformation (shear deformation), wenn dessen Spur gleich 0 ist. Ausserdem bezeichnen wir einen Spannungstensor σ_P als hydrostatischen Druck, falls dessen Hauptspannungen alle gleich sind.

   Weiter sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$A = [\sigma]_{\mathcal{E}} = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestimme die ersten drei Spannungsinvarianten I_1, I_2 und I_3 des obigen Spannungstensors σ.

   (b) Bestimme die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von σ.

   (c) Bestimme eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer σ durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

(d) Schreibe den obigen Spannungstensor σ als Summe einer Scherungsdeformation σ_S und eines hydrostatischen Drucks σ_P.

(e) Finde eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Matrixdarstellung von σ_S auf der Diagonale nur Nullen hat.

Lösung:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom von σ,

$$\begin{aligned} p_\sigma(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(9 + 6\lambda + \lambda^2) + 2 + 2 + (3+\lambda) + (3+\lambda) + 4\lambda \\ &= -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 + 6 + 6\lambda = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 10. \end{aligned}$$

Aus den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms erhalten wir die Spanninvarianten

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{Spur}(\sigma) = -6 \\ I_2 &= -(-3) = 3 \\ I_3 &= \det(\sigma) = 10. \end{aligned}$$

(b) Die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind durch die Eigenwerte von σ gegeben, die Nullstellen des charakteristischen Polynom $p_\sigma(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda^2 + 10$ sind. Wir erraten die Nullstelle $\lambda = 1$. Danach berechnen wir den Quotient

$$\frac{-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 10}{\lambda - 1} = -\lambda^2 - 7\lambda - 10,$$

der Nullstellen $\frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{-2} = \frac{7 \pm 3}{-2}$. Somit erhalten wir die drei Hauptspannungen $\sigma_1 = -5$, $\sigma_2 = -2$ und $\sigma_3 = 1$.

(c) Wir suchen nach den Eigenvektoren von σ bezüglich der Basis $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} E_{-5} = \ker(A + 5\mathrm{Id}) &= \ker \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \\ E_{-2} = \ker(A + 2\mathrm{Id}) &= \ker \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ -x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \\ E_{1} = \ker(A - \mathrm{Id}) &= \ker \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ 2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Man kann bei jedem obigen Eigenraum das Element mit $x = 1$ nehmen. Normalisiert erhalten wir die orthonormale Eigenbasis

$$b_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{1+1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{\sqrt{1+1+1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

$$b_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\sqrt{1+1+4}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Da beide $\mathcal{E}$ und $\mathcal{B}$ orthonormal sind, ist die Transformationsmatrix $O = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ orthogonal. Wegen seiner Kontravarianz hat σ bezüglich $\mathcal{B}$ diagonale Matrixdarstellung

$$[\sigma]_{\mathcal{B}} = O^{-1}[\sigma]_{\mathcal{E}}(O^{-1})^T = O^{-1}[\sigma]_{\mathcal{E}}O = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Bei (a) haben wir die Spur von σ gefunden. Sie ist gleich $\operatorname{Spur}(\sigma) = -6$. Daher betrachten wir

$$\begin{aligned} [\sigma_S]_{\mathcal{E}} &= [\sigma]_{\mathcal{E}} - \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathbb{I}_3 \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und

$$[\sigma_P]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(\sigma)\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(e) Es gibt eine Beziehung zwischen der Eigenvektoren von σ und σ_S, weil es gilt

$$\ker(\sigma_S - \lambda \mathrm{Id}) = \ker(A + 2\ \mathrm{Id} - \lambda \mathrm{Id}) = \ker(A - (\lambda - 2)\mathrm{Id}).$$

Also sind die Eigenvektoren von A und $[\sigma_S]$ die selben. Das bedeutet, dass auch σ_S bezüglich der bei (c) gefundenen Basis $\mathcal{B}$ diagonale Matrixdarstellung hat. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
[\sigma_S]_{\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[\sigma_S]_{\mathcal{E}}L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(A + 2\cdot \mathrm{Id})L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}AL_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} + L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\cdot 2 \cdot \mathrm{Id} \cdot L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} \\
= [\sigma]_{\mathcal{B}} + 2\cdot \mathrm{Id}\cdot L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Auch unabhängig davon kann man trotzdem $[\sigma_S]$ diagonalisieren, indem man das bei (c) für σ verwendete Verfahren benutzt.

Wir suchen dann eine symmetrische Matrix $C = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{bmatrix}$ mit Nullen auf der Diagonale, die Eigenwerte $-3, 0, 3$ besitzt. Die kann dann zur $[\sigma_S]_{\mathcal{B}}$ selbst diagonalisiert werden. Die Eigenwerte von C sind Nullstellen des Polynoms

$$p_C(\lambda) = \det(C - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = \begin{bmatrix} -\lambda & x & y \\ x & -\lambda & z \\ y & z & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 2xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2).$$

Also müssen die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{cases} 27 + 2xyz - 3(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \\ 0 + 2xyz - 0 = 0 \\ -27 + 2xyz + 3(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xyz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

Zum Beispiel kann man die Lösung $(x, y, z) = (0, 0, 3)$ nehmen. Sei also $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ eine Basis, bezüglich derer σ_S Matrixdarstellung

$$[\sigma_S]_{\mathcal{C}} = C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

hat. Wir möchten jetzt orthogonalen Eigenvektoren von C bezüglich $\mathcal{C}$ berechnen und mit b_1, b_2 und b_3 gleichsetzen. Bezüglich $\mathcal{C}$ gilt es

$$\begin{aligned}
\ker(C + 3\cdot \mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \{xc_2 - xc_3 : x \in \mathbb{R}\}, \\
\ker(C) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \{xc_1 : x \in \mathbb{R}\}, \\
\ker(C - 3\cdot \mathrm{Id}) = \ker \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \{xc_2 + xc_3 : x \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Normalisiert muss es das folgende gelten

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{c_2 - c_3}{||c_2 - c_3||} = \frac{c_2 - c_3}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}c_3 \\
b_2 &= c_1 \\
b_3 &= \frac{c_2 + c_3}{||c_2 + c_3||} = \frac{c_2 + c_3}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_3.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die orthogonale Transformationsmatrix von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$

$$L_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

mit Inverse

$$L_{\mathcal{CB}} = L_{\mathcal{CB}}^{-1} = L_{\mathcal{CB}}^{T} = L_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Anschliessend finden wir die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{CE}} &= \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{C}, \mathcal{E}) = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}, \mathcal{E}) \cdot \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) = L_{\mathcal{BE}} L_{\mathcal{CB}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}$$

eine Basis, die die gewünschte Eigenschaft erfüllt.