Musterlösung der Serie 2

Basen, Basiswechsel, Einsteinsche Summenkonvention

1. Seien $A = (A^i_j) \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ und $B = (B^i_j) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Matrizen, wo der obere Index die Reihe und der untere die Spalte bezeichnet. Seien weiter $x = (x^i) \in \mathbb{R}^\ell$ und $y = (y^i) \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren. Schreibe die Koordinaten der folgenden Ausdrücke mittels der Einsteinschen Summenkonvention:

   (a) AB

   (b) By

   (c) $y^T B^T$

   (d) $A^T x$

   (e) $xy^T B^T$

   Lösung:

   (a) Sei $C := AB \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$. Per Definition hat es $C^i_k = A^i_1 B^1_k + A^i_2 B^2_k + \cdots + A^i_m B^m_k = \sum_{J=1}^m A^i_J B^J_k = A^i_j B^j_k$.

   (b) $By \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ist ein Spaltenvektor. Es hat $(By)^i = B^i_1 y^1 + \cdots + B^i_n y^n = \sum_{J=1}^n B^i_J y^J = B^i_j y^j$.

   (c) Der Vektor $y^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ist ein Zeilenvektor, mit Koordinaten $(y^T)_i = y^i$. Die Transpose von B hat Einträge $(B^T)^k_j = B^j_k$, wobei $1 \leqslant j \leqslant m$ und $1 \leqslant k \leqslant n$. Dann

   $$(y^T B^T)_j = \sum_{K=1}^n (y^T)_K (B^T)^K_j = (y^T)_k (B^T)^k_j = y^k B^j_k.$$

   Alternativ kann man beobachten, dass $y^T B^T = (By)^T$. Dann erhält man direkt

   $$(y^T B^T)_i = ((By)^T)_i = (By)^i = B^i_j y^j.$$

   Diese zwei Ausdrücke für $y^T B^T$ sind äquivalent.

   (d) Es gilt $(A^T)^i_j = A^j_i$, wo $1 \leqslant i \leqslant \ell$ und $1 \leqslant j \leqslant m$. Dann $(A^T x)^i = (A^T)^i_j x^j = \sum_{J=1}^m A^J_i x^J$. Bei dem letzten Ausdruck sind beide J-Indizen oben. Um einen äquivalenten Ausdruck zu schreiben, der die Einsteinsche Summenkonvention nutzt, kann man die Kronecher Symbol δ_{jk} verwenden. Es hat per Definition $\delta_{jk} = 1$ für $j = k$ und $\delta_{jk} = 0$ sonst. Dann hat es

   $$(A^T x)^i = (A^T)^i_j x^j = \sum_{J=1}^m A^J_i x^J = \sum_{J=1}^m \sum_{K=1}^m A^J_i \delta_{JK} x^K = A^j_i \delta_{jk} x^k.$$

(e) Es hat $xy^T B^T \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$, wo $x \in \mathbb{R}^{\ell\times 1}$ Koordinaten x^i hat und $y^T B^T \in \mathbb{R}^{1\times m}$ Koordinaten $(y^T B^T)_j = B^j_k y^k$ hat. Dann gilt es

$$(xy^T B^T)^i_j = x^i B^j_k y^k.$$

2. Gegeben sind zwei $n \times n$ Matrizen $A = (A^i_j)$ und $B = (B^i_j)$. Sei $I = (\delta^i_j)$ die $n \times n$ Einheitsmatrix. Weiter sei $x = (x^i)$ ein n-dimensionellen Spaltenvektoren. Schreibe die folgenden Ausdrücke explizit aus.

(a) $x^j A^i_k B^k_j$

(b) $\delta^j_i \delta^k_j A^i_k$

(c) $\delta^j_i A^i_k B^k_\ell x^\ell$

(d) $\delta^i_i \delta^k_j \delta^j_k$

Lösung:

(a) Es hat

$$x^j A^i_k B^k_j = \sum_{J=1}^n \sum_{K=1}^n x^J A^i_K B^K_J = \sum_{J=1}^n \sum_{K=1}^n A^i_K B^K_J x^J.$$

Weiter kann man schreiben

$$x^j A^i_k B^k_j = \sum_{K=1}^n A^i_K \sum_{J=1}^n B^K_J x^J = \sum_{K=1}^n A^i_K (Bx)^K = (ABx)^i,$$

die i-te Zeile von ABx.

(b) Es hat $\delta^J_I \delta^K_J = 1$ wenn und nur wenn $I = J = K$. Sonnst ist $\delta^K_I \delta^K_J = 0$. Dann schreibt man

$$\delta^j_i \delta^k_j A^i_k = \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N \sum_{K=1}^N \delta^J_I \delta^K_J A^I_K = \sum_{I=1}^N \delta^I_I \delta^I_I A^I_I = \sum_{I=1}^N A^I_I = \operatorname{tr}(A).$$

(c) Es gilt

$$\delta^j_i A^i_k B^k_\ell x^\ell = A^j_k B^k_\ell x^\ell = (ABx)^j,$$

die j-te Zeile von ABx.

(d) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\delta^i_i \delta^k_j \delta^j_k &= \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n \sum_{K=1}^n \delta^I_I \delta^J_K \delta^K_J = \sum_{I=1}^n 1 \cdot \sum_{J=1}^n \sum_{K=1}^n \delta^J_K \delta^K_J = \sum_{I=1}^n 1 \cdot \sum_{J=1}^n \delta^J_J \delta^J_J \\ &= n \cdot n = n^2.\end{aligned}$$

3. Sei $u = (u_i) \in \mathbb{R}^n$. Definieren wir die Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = u_i - u_j$. Zeige, dass $A_{ij}x^i x^j = 0$ gilt.

   Lösung: Wir bemerken, dass es $a_i i = u_i - u_i = 0$ für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ hat. Dann kann man das folgende schreiben:

$$
\begin{aligned}
A_{ij}x^i x^j &= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{N} A_{IJ}x^I x^J = \sum_{I=1}^{N}\left(\sum_{J=1}^{I-1} A_{IJ}x^I x^J + \sum_{J=I+1}^{N} A_{IJ}x^I x^J\right) \\
&= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1} A_{IJ}x^I x^J + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I+1}^{N} A_{IJ}x^I x^J \\
&= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1} A_{IJ}x^I x^J + \sum_{J=1}^{N}\sum_{I=1}^{J-1} A_{IJ}x^I x^J.
\end{aligned}
$$

   Wir können dann die Indizes im zweiten Summand umschalten. Wir beobachten, dass $A_{JI} = u_J - u_I = -(u_I - u_J) = -A_{IJ}$. Daraus folgern wir,

$$
\begin{aligned}
A_{ij}x^i x^j &= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1} A_{IJ}x^I x^J + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1} A_{JI}x^J x^I \\
&= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1} \left(A_{IJ}x^I x^J + A_{JI}x^J x^I\right) = \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1} \left(A_{IJ} + A_{JI}\right) x^I x^J \\
&= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{I-1} 0 \cdot x^I x^J = 0.
\end{aligned}
$$

4. Welche der folgenden Ausdrücke machen Sinn? Warum?

   (a) $x^i y_i = t^i$

   (b) $A_{nm}E^{mn} = U$

   (c) $A^{ep}F_{e\ell} = T^p_{e\ell}$

   (d) $P^{fe}F_f E^r = S^e H^r$

   (e) $E^i_{ch}H_{oe}R^{ch}N^{en} = U^{ni}T_o$

   Lösung:

   (a) Der Ausdruck macht keinen Sinn. Da der Index i auf der linken Seite einmal unten und einmal oben erscheint, ist er Laufindex eine Summe (nämlich, $\sum_I x^I y_I$). Dann hängt der Wert der linken Seite von keinen Index ab.

   (b) Der Ausdruck macht Sinn. Es geht nämlich um eine Gleichung $\sum_{M,N} A_{NM}E^{MN} = U$.

(c) Der Ausdruck macht keinen Sinn. Der Index e auf der linken Seite ist ein Laufindex. Deshalb kann hängt der Ausdruck davon nicht ab.

(d) Der Ausdruck macht Sinn, da es über den Index f summiert wird. Die beiden Seiten hängen dann von zwei Indizes e und r ab.

(e) Der Ausdruck macht Sinn. Die Indizes c, h und e links sind Laufindizes. Die Indizes i, n und o bleiben.

5. Gegeben sind die reellen Matrizen

$$m_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad m_3 := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_4 := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \text{ und } B =: \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1000 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2-Matrizen ist.

(b) Finde $[B]_{\mathcal{M}}$.

(c) Finde $[A]_{\mathcal{M}}$ und folgere daraus, dass $\{m_1, A, m_3, m_4\}$ keine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2-Matrizen ist.

Lösung:

(a) Wir benutzen die Standardbasis $\mathcal{E} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Dann hat es

$$[m_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [m_2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [m_3]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [m_4]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und ist $\mathcal{M}$ eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ wenn und nur wenn die Matrix

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Ist das der Fall, dann ist $L = L_{\mathcal{M}\mathcal{E}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{M}$ und wird ihre Inverse später von Nutzen sein. Deshalb könnte man direkt durch Gauss-Reduktion versuchen, die Inverse von L zu finden, so wie bei Serie 1, Aufgabe 2. Diesmal werden wir aber A^{-1} mit

Hilfe der Adjunkten berechnen. Dann reicht es für (a) zu bemerken, dass die Entwicklung nach der zweiten Zeile lautet

$$\det(L) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2-2+2) = 1 \neq 0.$$

Wie oben erklärt, ist dann $\mathcal{M}$ eine Basis.

(b) Es hat

$$[B]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$L^{-1}_{\mathcal{M}\mathcal{E}} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgern wir, dass

$$[B]_{\mathcal{M}} = L^{-1}_{\mathcal{M}\mathcal{E}}[B]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1-70+200+2000 \\ -20+100 \\ 10 \\ 1+40-100-1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2129 \\ 80 \\ 10 \\ -1059 \end{pmatrix}.$$

(c) Es hat

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$[A]_{\mathcal{M}} = L_{\mathcal{M}\mathcal{E}}^{-1}[A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, dass $A = 2m_1 + 3m_3 + m_4$ und dass die vier Matrizen m_1, A, m_3 und m_4 linear abhängig sind, so dass sie keine Basis bilden können.

6. Für jede folgende Untermenge vom Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 4$, bestimme ob sie ein Untervektorraum ist. Ist das der Fall, finde eine Basis dieses Untervektorraumes.

(a) $U_1 := \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : f(1) = 1\}$

(b) $U_2 := \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : f(1) = f(0) = f(-1) = 0\}$

(c) $U_3 := \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : f(0) + f'(0) = 2f(1)\}$

Lösung:

(a) U_1 ist kein Untervektorraum, da das Nullpolynom 0 die Gleichung $0(1) = 1$ nicht erfüllt, so dass es nicht in U_1 enthalten ist.

(b) Sei $f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ und schreiben wir $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ mit $a_i \in \mathbb{R}$. Es hat $f \in U_2$ wenn und nur wenn $f(1) = f(0) = f(-1) = 0$. Das heisst,

$$\begin{aligned} f \in U_2 &\iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \\ &\iff a_0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \\ &\iff a_0 = a_1 + a_3 = a_2 + a_4 = 0. \end{aligned}$$

Also besteht U_2 aus allen Polynomen f, die sich als $f = u_1x + u_2x^2 - u_1x^3 - u_2x^4 = u_1(x - x^3) + u_2(x^2 - x^4)$ schreiben lassen, wo u_1, u_2 beliebige reelle Zahlen sind. Das bedeutet, dass U_2 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ mit Basis $\{x - x^3, x^2 - x^4\}$ ist.

(c) Sei wieder $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$. Wir wissen, dass man $f' = (\dots)x + a_1$ schreiben kann (im Klammer steht ein Polynom, das für uns nicht wichtig sein wird). Dann hat es $f'(0) = 0 + a_1 = a_1$. Ausserdem berechnen wir $f(0) = a_0$ und $2f(1) = 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
U_3 &= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : \\
&\qquad a_0 + a_1 = 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5\} \\
&= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : \\
&\qquad a_0 = -a_1 - 2a_2 - 2a_3 - 2a_4 - 2a_5\} \\
&= \{-a_1 - 2a_2 - 2a_3 - 2a_4 - 2a_5 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : a_i \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_1(x-1) + a_2(x^2-2) + a_3(x^3-2) + a_4(x^4-2) \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : a_i \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Daraus folgern wir, dass U_3 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ ist, der von der Menge $\{x-1, x^2-2, x^3-2, x^4-2\}$ erzeugt ist. Da diese vier Polynome linear unabhängig sind (warum?), ist $\{x-1, x^2-2, x^3-2, x^4-2\}$ eine Basis von U_3.