Musterlösung der Serie 3

Lineare Transformationen und ihre Matrixdarstellung

1. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, mit

$$x_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix},\ x_3 = \begin{bmatrix}3\\5\\7\end{bmatrix}.$$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ die einzige lineare Abbildung, die $x_1 \mapsto x_2$ bzw. $x_2 \mapsto x_1$ bzw. $x_3 \mapsto x_3$ schickt.

(a) Bestimme die Matrixdarstellung von φ bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Bestimme die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.

(c) Ist die bei (b) gefundene Matrix diagonalisierbar?

Lösung:

(a) Es hat

$$\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \big[[\varphi(x_1)]_{\mathcal{B}} \quad [\varphi(x_2)]_{\mathcal{B}} \quad [\varphi(x_3)]_{\mathcal{B}}\big] = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

(b) Wie an der Vorlesung gesehen, gilt $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} \cdot \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \cdot L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, wo $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ die Wechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ bezeichnet. Es hat

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \big[[x_1]_{\mathcal{E}} \quad [x_2]_{\mathcal{E}} \quad [x_3]_{\mathcal{E}}\big] = \begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\3&5&7\end{bmatrix}$$

und $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}$. Die Inverse kann man durch Gauss-Reduktion berechnen:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&3&5&0&1&0\\3&5&7&0&0&1\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&-1&-2&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&2&-1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-4&1&1\\0&1&0&1&-2&1\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right].$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{E},\mathcal{E}) &= \begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\3&5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&1&1\\1&-2&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\3&5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&1\\-4&1&1\\1&1&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4&3&0\\-5&4&0\\-10&6&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(c) Die bei (a) und (b) gefundenen Matrizen sind ähnlich. Deshalb ist $\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{E},\mathcal{E})$ diagonalisierbar wenn und nur wenn $\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B},\mathcal{B})$ diagonalisierbar ist. Wir berechnen die Eigenwerte von $[\varphi]_{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned}0 \overset{!}{=} \det(\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B},\mathcal{B})-\lambda I) &= \begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-1) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2.\end{aligned}$$

Es gibt zwei Eigenwerte $\lambda = 1$ (mit Vielfachheit 2) und $\lambda = -1$ (mit Vielfachheit 1). Die Matrix $\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B},\mathcal{B})$ ist diagonalisierbar, wenn und nur wenn die algebraische und geometrische Vielfachheiten jedes Eigenwertes übereinstimmen. Da die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes nicht kleiner als 1 und nicht grösser als die algebraische Vielfachheit sein kann, müssen wir nur feststellen, ob die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = 1$ gleich 1 oder 2 ist. Die ist als die Dimension des Eigenraum V_1 definiert. Dieser Eigenraum ist der Kern der Matrix

$$\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B},\mathcal{B}) - I = \begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Dann hat es $\dim(V_1) = 2$ (eine Basis von V_1 ist $\{x_1 + x_2, x_3\}$). Daraus schliessen wir, dass $\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{E},\mathcal{E})$ diagonalisierbar ist.

2. Gegeben sind die zwei Basen von $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\right\}$$

und

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\2&0\end{bmatrix}\right\}$$

sowie die zwei lineare Abbildungen

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} &\to \mathbb{R}^{2\times 2} & \tilde{\varphi} : \mathbb{R}^{2\times 2} &\to \mathbb{R}^{2\times 2}\\ A &\mapsto A - A^T & A &\mapsto A\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}A.\end{aligned}$$

(a) Bestimme die Matrixdarstellungen von φ bezüglich $\mathcal{B}$ und von $\tilde{\varphi}$ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.

(b) Berechne die Wechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$.

(c) Finde die Matrixdarstellungen von φ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$ und von $\tilde{\varphi}$ bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung:

(a) Für jede Matrix $B \in \mathcal{B}$ möchten wir die Koordinaten von $\varphi(B)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ berechnen. Es hat

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = 0$$
$$\varphi\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = 0$$
$$\varphi\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$
$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\-\frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 1\\-\frac{3}{2} & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{5}{2}\\-\frac{5}{2} & 0\end{bmatrix} = -\frac{5}{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

und somit

$$\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2}\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Bei $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ verfahren wir analog. Für eine beliebige Matrix $A = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ berechnet man

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(A) &= \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}a & 0\\c & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-a & -b\\c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2a & b\\0 & -d\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dank der obigen Formel erhalten wir

$$\tilde{\varphi}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\tilde{\varphi}\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\tilde{\varphi}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}$$
$$\tilde{\varphi}\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{bmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}$$

und somit

$$\operatorname{Mat}(\tilde{\varphi}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(b) Wir betrachten die Standardbasis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Für eine beliebige Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ gilt dann $[A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$. Deshalb hat es

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (-1) \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) Wir berechnen $\det(L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}) = 1 \cdot (-\frac{1}{2})(10-4) = -3$. Dann hat es

$$L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Mat}(\varphi,\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{B}}) &= L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1}\cdot \mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B},\mathcal{B})\cdot L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Mat}(\tilde{\varphi},\mathcal{B},\mathcal{B}) &= L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}^{-1}\cdot \mathrm{Mat}(\tilde{\varphi},\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{B}})\cdot L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & -12 & 0 & -6 \\ 9 & 12 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & -3 \\ -\frac{9}{2} & -6 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

3. Gegeben sind die Ebene $\pi : x - y + z = 0$ und die Gerade $\ell : x = y = z$ im Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Ebenenspiegelung an π und $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Achsenspiegelung an ℓ.

   (a) Finde eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von α besteht und bestimme die Matrixdarstellung $[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

   (b) Finde die Matrixdarstellung von α bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

   (c) Finde die Matrixdarstellung von β bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(d*) Sei $\pi' = \beta(\pi)$ die an der Gerade ℓ reflektierte Ebene π. Bestimme eine Gleichung, die π' definiert.

Lösung:

(a) Die Abbildung α ist die Identität auf der Ebene π. Deshalb hat es $\alpha(u_1) = u_1$ und $\alpha(u_2) = u_2$ wenn man die zwei linear unabhängige Vektoren $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ definiert. Weiter gilt $\alpha(u_3) = -u_3$ für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, der orthogonal zu π ist. Per Definition hat es

$$\pi = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\},$$

so dass wir $u_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ wählen können. Die Matrix $\mathcal{B} := \{u_1, u_2, u_3\}$ besteht dann aus Eigenvektoren von α und es hat

$$\mathrm{Mat}(\alpha, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Die Wechselmatrix ist

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ihre Inverse ist

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgern wir

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Mat}(\alpha,\mathcal{E},\mathcal{E}) &= L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \cdot \operatorname{Mat}(\alpha,\mathcal{B},\mathcal{B}) \cdot L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

(c) Wie bei α, suchen wir nach einer Basis aus Eigenvektoren von β. Der Vektor $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ gehört zur Gerade ℓ, so dass $\beta(w_1) = w_1$. Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, der orthogonal zur ℓ ist, gilt $\beta(v) = -v$. Diese orthogonalen Vektoren liegen auf der Ebene $x + y + z = 0$. Wir wählen dann $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bezüglich der Basis $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ ist die Darstellungmatrix von β gegeben durch

$$
\operatorname{Mat}(\beta,\mathcal{C},\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Weiter berechnen wir die Wechselmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{C}$

$$
L_{\mathcal{C}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

und ihre Inverse

$$
L_{\mathcal{C}\mathcal{E}}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.
$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}(\beta, \mathcal{E}, \mathcal{E}) &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(d) Für jeden Punkt $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \pi$, sei $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} := \beta(P) \in \pi'$ der dementsprechende an ℓ reflektierte Punkt. Um eine Gleichung für x', y', z' zu finden, möchten wir die Koordinaten von P als Funktion von x', y' und z', schreiben. Es hat

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \beta^{-1}\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right)$$

Es ist aber klar, dass $\beta \circ \beta = \mathrm{id}$. Dann hat es $\beta = \beta^{-1}$ und wir schreiben

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \beta\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -x' + 2y' + 2z' \\ 2x' - y' + 2z' \\ 2x' + 2y' - z' \end{bmatrix}.$$

Aus der Gleichung $\frac{1}{3}(x - y + z) = 0$ folgern wir

$$(-x' + 2y' + 2z') - (2x' - y' + 2z') + (2x' + 2y' - z') = 0,$$

d.h., $\pi' : -x' + 5y' - z' = 0$.

4. Sei $\Theta : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ die lineare Transformation des Vektorraumes der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$, die definiert ist durch

$$\Theta(f(x)) = (3x - 1)f(x) - (x^2 - 2)f'(x).$$

Bestimme die Matrixdarstellung von Θ bezüglich der Standarbasis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ sowie bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}} = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}$.

Lösung: Es hat

$$\begin{aligned}
\Theta(1) &= 3x - 1 - (x^2 - 2) \cdot 0 = 3x - 1 \\
\Theta(x) &= (3x - 1)x - (x^2 - 2) \cdot 1 = 2x^2 - x + 2 \\
\Theta(x^2) &= (3x - 1)x^2 - (x^2 - 2) \cdot 2x = x^3 - x^2 + 4x \\
\Theta(x^3) &= (3x - 1)x^3 - (x^2 - 2) \cdot 3x^2 = -x^3 + 6x^2.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\operatorname{Mat}(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Wechselmatrize zwischen $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ haben wir bei Serie 1, Aufgabe 3c) gefunden. Sie sind nämlich

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist die Matrixdarstellung von Θ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Mat}(\Theta, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}) &= L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} \cdot \operatorname{Mat}(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \cdot L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$