Prof. Dr. Özlem Imamoglu

Musterlösung der Serie 4

Lineare Transformationen, Linearformen

1. Gegeben ist die Gerade $\ell : x+y = y-2z = 0$ im Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Sei $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion an ℓ. Finde die Matrixdarstellung von π bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Lösung: Die Gerade ℓ besteht aus allen Vektoren $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, die die Gleichungen $x + y = y - 2z = 0$ erfüllen. Die Gleichungen können umgeschrieben werden als

$$\begin{aligned} y &= 2z \\ x &= -y = -2z. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $P = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z$. Dann definieren wir $x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, so dass es $\pi(x_1) = x_1$ hat.

Weiter suchen wir nach zwei linear unabhängigen Vektoren $x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$, die orthogonal zu x_1 sind, was bedeutet, $\pi(x_2) = \pi(x_3) = 0$. Die orthogonale Ebene $\mathcal{P}$ zu x_1 ist definiert durch

$$\mathcal{P} : x_1^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0,$$

d.h.,

$$\mathcal{P} : -2x + 2y + z = 0.$$

Wir können dann wählen

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ und } x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bezüglich der Basis $\mathcal{C} := \{x_1, x_2, x_3\}$ ist die Darstellungmatrix von π gegeben durch

$$\mathrm{Mat}(\pi, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Wechselmatrix $L_{\mathcal{BC}}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$ erfüllt $\mathcal{B} = \mathcal{C} L_{\mathcal{BC}}$, d.h.,

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{BC}} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -10 \\ -9 & 6 & 5 \\ 9 & -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Inverse dieser Matrix durch Gauss-Reduktion:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{9} & 1 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 & 3 \end{array}\right].$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}(\pi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) &= L_{\mathcal{BC}}^{-1} \cdot \mathrm{Mat}(\pi, \mathcal{C}, \mathcal{C}) \cdot L_{\mathcal{BC}} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 5 \\ -\frac{3}{2} & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 5 \\ -\frac{3}{2} & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{10}{9} \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, mit

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die $x_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x_2 \mapsto \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $x_3 \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ schickt. Weiter betrachten wir die Basis $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^2$.

(a) Berechne die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

(b) Berechne die Matrixdarstellung von ψ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.

(c*) Finde alle lineare Abbildungen $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die $\theta \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ erfüllen.

(d*) Finde eine lineare Abbildungen $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die $\psi \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ erfüllen.

Lösung:

(a) Sei $y_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, so dass $\mathcal{C} = \{y_1, y_2\}$. Wir berechnen direkt

$$\begin{aligned}
\psi(x_1) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} y_1 - \frac{1}{3} y_2 \\
\psi(x_2) &= \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 y_1 + \frac{3}{2} y_2 \\
\psi(x_3) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2} y_2.
\end{aligned}$$

Oben haben wir zuerst der rote Koeffizient gefunden, so dass die erste Komponente übereinstimmt, und dann der blaue.
Per Definition hat es dann

$$\mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Alternativ kann man zuerst bemerken, dass es hat

$$\mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

wobei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet, und die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{C}\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{C}$ berechnen,

$$L_{\mathcal{C}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dann lässt sich die Transformationsmatrix $[\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ berechnen als

$$\mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = L_{\mathcal{C}\mathcal{E}}^{-1} \mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) Sei $\mathcal{E}'$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Dann hat es

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Die Inverse haben wir bei Aufgabe 1 der Serie 3 berechnet. Es hat

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}'}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bei (a) haben wir $\mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{B}, \mathcal{E})$ gefunden. Weiter hat es $\mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{E}', \mathcal{E}) L_{\mathcal{B}\mathcal{E}'}$, so dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{E}', \mathcal{E}) = \mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{B}, \mathcal{E}) L_{\mathcal{B}\mathcal{E}'}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -11 & 7 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Sei $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, die die Bedingung $\theta \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ erfüllt. Das Bild $\mathrm{Im}(\theta)$ (der Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, der aus Vektoren $\theta(y)$ mit $y \in \mathbb{R}^2$ besteht) von θ kann Dimension nicht grösser als 2 besitzen, da es von den zwei Spaltenvektoren der Matrixdarstellung von θ erzeugt ist. Es gilt aber $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(\theta \circ \psi) \subseteq \mathrm{Im}(\theta)$ und somit müssen die Dimensionen die Gleichung $3 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(\theta)) \leqslant 2$ erfüllen, was ein Widerspruch ist. Folglich existiert keine solche Abbildung θ.

(d) Sei $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, die die Bedingung $\psi \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ erfüllt. Wir schreiben

$$\mathrm{Mat}(\eta, \mathcal{E}, \mathcal{E}') = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Dann fordern wir an die Gleichung

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Mat}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{E}', \mathcal{E}') &\stackrel{!}{=} \mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{E}', \mathcal{E}) \cdot \mathrm{Mat}(\eta, \mathcal{E}, \mathcal{E}') \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -11 & 7 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a - 11c + 7e & 2b - 11d + 7f \\ 2a - 6c + 3e & 2b - 6d + 3f \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die ist äquivalent zu

$$\begin{cases} 2a = 1 + 11c - 7e \\ 2b = 11d - 7f \\ 1 + 11c - 7e - 6c + 3e = 0 \\ 11d - 7f - 6d + 3f = 1, \end{cases}$$

d.h.,

$$\begin{cases} 2a = 1 + 11c - 7e \\ 2b = 11d - 7f \\ 1 + 5c - 4e = 0 \\ 5d - 4f = 1 \end{cases}$$

Wir können dann z.B. die folgende Lösung wählen:

$$d = f = 1, \; c = e = -1, \; a = \frac{1 - 11 + 7}{2} = -\frac{3}{2}, \; b = \frac{11 - 7}{2} = 2.$$

Dann erfüllt die lineare Abbildung η mit Matrixdarstellung

$$\mathrm{Mat}(\eta, \mathcal{E}, \mathcal{E}') = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

die Bedingung $\psi \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

3. Gegeben ist die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

von $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ (siehe Serie 3, Aufgabe 2). Seien weiter $\mathrm{tr}, \omega, \eta : V \to \mathbb{R}$ die Linearformen, die definiert sind durch

$$\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d,$$

$$\omega(A) = \mathrm{tr}\left(A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A\right),$$

$$\eta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a - b.$$

(a) Bestimme die Matrixdarstellung von tr bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Bestimme die Matrixdarstellungen von ω bezüglich $\mathcal{B}$.

(c) Bestimme die Matrixdarstellungen von η bezüglich $\mathcal{B}$.

(d*) Finde eine weitere Linearform $\theta : V \to \mathbb{R}$, so dass $\{\mathrm{tr}, \omega, \eta, \theta\}$ eine Basis des Dualvektorraums $(V)^*$ ist.

Lösung:

(a) Wir schreiben $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Die Matrixdarstellung von tr bezüglich $\mathcal{B}$ ist

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{tr}, \mathcal{B}, \{1\}) = [\mathrm{tr}(b_1)\ \mathrm{tr}(b_2)\ \mathrm{tr}(b_3)\ \mathrm{tr}(b_4)] = [2\ 2\ 0\ 2].$$

(b) Sei $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ wie bei Serie 3, Aufgabe 2 definiert. Dann hat es $\omega = \mathrm{tr} \circ \tilde{\varphi}$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}(\omega, \mathcal{B}, \{1\}) &= \mathrm{Mat}(\mathrm{tr}, \mathcal{B}, \{1\}) \cdot \mathrm{Mat}(\tilde{\varphi}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \\ &= [2\ 2\ 0\ 2] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} = [1\ 4\ 0\ 1].\end{aligned}$$

(c) Die Matrixdarstellung von η bezüglich $\mathcal{B}$ ist

$$\mathrm{Mat}(\eta, \mathcal{B}, \{1\}) = [\eta(b_1)\ \eta(b_2)\ \eta(b_3)\ \eta(b_4)] = [1\ 2\ 1\ 0].$$

(d) Sei $\mathcal{B}^* = \{b^1, b^2, b^3, b^4\}$ die Dualbasis bezüglich $\mathcal{B}$. Hier erfüllt per Definition jede Linearform b^I die Gleichung $b^I(b_J) = \delta^I_J$. Sei $\alpha \in V^*$ eine Linearform, mit Komponenten bezüglich $\mathcal{B}^*$ gegeben durch den Reihenvektor $[\alpha_1 \ldots \alpha_4]$, so dass $\alpha = \alpha_i b^i$. Es geht nicht um einen Spaltenvektor, weil die Indize bei dualen Vektorräume umgekehrt sein sollten, so dass die Ausdrücke $\alpha_i b^i$ und $b^i(b_j)$ Sinn machen. Wir bemerken, dass die Matrixdarstellung von α bezüglich $\mathcal{B}$

$$\mathrm{Mat}(\alpha, \mathcal{B}, \{1\}) = [\alpha(b_i)]_i = [\alpha_j b^j(b_i)]_i = [\alpha_j \delta^j_i]_i = [\alpha_i]$$

lautet. Also sind die bei (a), (b) und (c) gefundene Reihenvektoren genau die Komponentenvektoren von tr, ω und η bezüglich $\mathcal{B}^*$. Dann ist θ der vierte Linearform einer Basis von V^* wenn und nur wenn der dementsprechende Komponentenvektor $[\theta_i]_i$ die Bedingung

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix} \neq 0.$$

erfüllt.

Zum Beispiel ist das der Fall, wenn $\theta = b^1$ (d.h., $\theta_1 = 1$ und $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$). Diese Linearform ist die einzige, die $b_1 \mapsto 1$ schickt und b_2, b_3 und b_4 zum Nullvektor schickt.