Musterlösung der Serie 5

Eigenwerte, Linearformen

1. Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Vektorraum der reellen Matrizen, siehe Aufgabe 2 aus der Serie 3. Seien φ und $\tilde{\varphi}$ die lineare Transformationen $V \to V$, die definiert sind durch

$$\varphi(A) = A - A^T, \quad \tilde{\varphi}(A) = A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A.$$

   (a) Finde Eigenwerte und Eigenvektoren von φ.

   (b) Ist φ diagonalisierbar? Wenn ja, bestimme eine Eigenbasis $\mathcal{E}_\varphi$ und die Matrixdarstellung von φ bezüglich $\mathcal{E}_\varphi$.

   (c) Finde die Eigenwerte von $\tilde{\varphi}$. Ist $\tilde{\varphi}$ diagonalisierbar?

Lösung:

   (a) Bei Aufgabe 2, Serie 3 haben wir die Matrixdarstellung von φ gefunden bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   Die lautet

$$A := \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Wir berechnen das charakteristische Polynom von A:

$$p_A(\lambda) := \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3(2-\lambda).$$

   Es gibt die zwei Eigenwerte $\lambda = 0$ (mit Vielfachheit 3) und $\lambda = 2$. Wir berechnen dann die Eigenräume $E_\lambda := \ker(A - \lambda \mathrm{Id})$.

Es hat

$$E_0 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die drei gefundene Spaltenvektoren sind Koordinatenvektoren bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Deshalb gilt es $E_0 = \operatorname{span}\{M_1, M_2, M_3\}$, wobei

$$\begin{aligned} M_1 &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ M_2 &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ M_3 &= 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Weiter hat es

$$E_2 = \ker \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

was bedeutet, dass $E_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) Bei (a) haben wir vier Eigenvektoren gefunden. Sei $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist $\mathcal{E}_\varphi = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ eine Eigenbasis von φ, bezüglich der hat φ diagonale Matrixdarstellung

$$\operatorname{Mat}(\varphi, \mathcal{E}_\varphi, \mathcal{E}_\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Bei Aufgabe 2, Serie 3 haben wir die Matrixdarstellung von $\tilde{\varphi}$ gefunden bezüglich der Basis

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Die lautet

$$\tilde{A} := \operatorname{Mat}(\tilde{\varphi}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom von $\tilde{A}$:

$$\begin{aligned} p_{\tilde{A}}(\lambda) &:= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda+1)\left(\frac{2}{9}-\lambda+\lambda^2-\frac{2}{9}\right) = (\lambda-2)(\lambda+1)\lambda(\lambda-1). \end{aligned}$$

Somit finden wir die vier verschiedenen Eigenwerte $\lambda = 2$, $\lambda = -1$, $\lambda = 0$, $\lambda = 1$.

Wir wissen, dass jeder Eigenraum E_λ Dimension $\geqslant 1$ hat, sobald λ ein Eigenwert ist. Dazu wissen wir, dass Eigenvektoren bezüglich verschiedlicher Eigenwerte linear unabhängig sind. Deshalb gibt es vier linear unabhängige Eigenvektoren und somit eine Eigenbasis. Dann muss $\tilde{\varphi}$ diagonalisierbar sein.

2. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$. Sei $\{e_0, \ldots, e_3\}$ die Standardbasis von V, wobei $e_i := x^i$. Gegeben sind die folgenden Linearformen $V \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \theta^0(f(x)) &:= f(0), & \theta^1(f(x)) &:= f'(0), \\ \theta^2(f(x)) &:= f''(0), & \theta^3(f(x)) &:= f'''(0). \end{aligned}$$

Weiter sei $a \in \mathbb{R}$ und $\alpha : V \to \mathbb{R}$ die Linearform definiert durch $\alpha(f(x)) := f(a)$.

(a) Zeige, dass das folgende für $I, J \in \{0,1,2,3\}$ gilt:

$$\theta^I(e_J) = \begin{cases} I! & \text{wenn } I = J \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Berechne die Ausdrücke $\theta^i(e_j) \cdot \theta^j(e_i)$ und $\theta^i(e_i) \cdot \theta^j(e_j)$.

(c) Zeige, dass die Linearformen $\theta^0, \ldots, \theta^3 \in V^*$ eine Basis von V^* bilden.

(d) Finde $\alpha_0, \ldots, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, die $\alpha = \alpha_i \theta^i$ entfüllen, d.h., die Komponenten von α bezüglich der Basis $\{\theta^0, \ldots, \theta^3\}$ von V^*.

Lösung:

(a) Wir bezeichnen als $f^{(I)}$ die I-te Ableitung des Polynoms f. Jedes Polynom e_J hat Grad J. Deshalb hat es $e_J^{(I)} = 0$, sobald $I > J$. Wir folgern daraus, dass es $\theta^I(e_J) = 0$ für $I > J$ gilt.

Da e_J ein Monom vom Grad J ist, ist $e_J^{(I)}$ ein Monom vom Grad $J - I$, sobald $I \leqslant J$. Also ist $e_J^{(I)}$ ein Monom vom positiven Grad wenn $I < J$, was bedeutet, dass $\theta^I(e_J) = e_J^{(I)}(0) = 0$ für $I < J$.

Zum Schluss müssen wir uns mit dem Fall $I = J$ beschäftigen. Es gilt

$$e_0^{(0)} = 1 = 0!,\ e_1^{(1)} = \frac{d}{dx}x = 1!,\ e_2^{(2)} = \frac{d}{dx}(2x) = 2 = 2!,\ e_3^{(3)} = 3e_2^{(2)} = 6 = 3!$$

Da die obige Polynome konstant sind, haben wir die Werte von $\theta^I(e_I)$ schon gefunden, nämlich, $\theta^I(e_I) = I!$

(b) Wegen der Einsteinschen Summenkonvention gilt es

$$\theta^i(e_j) \cdot \theta^j(e_i) = \sum_{I,J} \theta^I(e_J) \cdot \theta^J(e_I) \overset{(*)}{=} \sum_{I=0}^{3} \left(\theta^I(e_I)\right)^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 6^2 = 42.$$

Bei (*) haben wir berücksichtigt, dass $\theta^I(e_J) = 0$ für $I \neq J$, sodass nur die Summanden mit $I = J \in \{0, 1, 2, 3\}$ relevant sind.
Weiter hat es

$$\begin{aligned}\theta^i(e_i) \cdot \theta^j(e_j) &= \sum_{I,J} \theta^I(e_I) \cdot \theta^J(e_J) = \sum_{I=0}^{3} \theta^I(e_I) \cdot \sum_{J=0}^{3} \theta^J(e_J) = \left(\sum_{I=0}^{3} \theta^I(e_I)\right)^2 \\ &\overset{(a)}{=} (1 + 1 + 2 + 6)^2 = 100.\end{aligned}$$

(c) Da V endlich ist, hat der Dualvektorraum V^* die selbe Dimension als V, nämlich, $\dim(V^*) = 4$. Deshalb genügt es zu zeigen, dass $\theta^0, \dots, \theta^3$ linear unabhängig sind.
Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ vier reellen Zahlen so dass $\theta := \lambda_i\theta^i = 0$. Die Linearform θ ist trivial wenn und nur wenn $\theta(e_j) = 0$ für jedes $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Also hat es

$$0 = (\lambda_i\theta^i)(e_j) = \lambda_i \cdot \theta^i(e_j) \overset{(a)}{=} \lambda_j \cdot j!$$

für jedes $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, was heisst, dass $\lambda_j = 0$. Infolgedessen sind die vier Linearformen $\theta^0, \dots, \theta^3$ linear unabhängig.

(d) Wir berechnen $\alpha(e_J)$ für jedes $J \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned}\alpha(e_0) &= \alpha(1) = 1 \\ \alpha(e_1) &= \alpha(x) = a \\ \alpha(e_2) &= \alpha(x^2) = a^2 \\ \alpha(e_3) &= \alpha(x^3) = a^3.\end{aligned}$$

Also gilt die Formel $\alpha(e_j) = a^j$. Schreibt man $\alpha = \alpha_i\theta^i$, dann folgert man

$$a^j = \alpha(e_j) = \alpha_i\theta^i e_j \overset{(a)}{=} \alpha_j j!$$

Somit erhalten wir $\alpha_j = a^j/j!$, nämlich,

$$\alpha = \theta^0 + a\theta^1 + \frac{a^2}{2}\theta^2 + \frac{a^3}{6}\theta^3.$$

3. Gegeben ist eine Nummer $a \in \mathbb{R}$ und die Vektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Zeige, dass $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, wenn und nur wenn $a \notin \{-1, 0\}$.

   (b) Nehmen wir an, dass $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Transformation, die $v_1 \mapsto v_2$ bzw. $v_2 \mapsto v_1$ bzw. $v_3 \mapsto e_1 + (a+2)e_2 + e_3$ schickt. Für welche Werte von a ist ψ diagonalisierbar?

Lösung:

(a) Die drei Vektoren v_1, v_2 und v_3 bilden eine Basis wenn und nur wenn

$$0 \neq \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1-a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} = -a(1-a-2) = a(a+1).$$

Wenn $a = 0$ oder $a = -1$, dann ist die obige Determinante gleich Null. Sonst ist die Matrix invertierbar und somit $\mathcal{B}$ eine Basis.

(b) Wir möchten die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ bestimmen. Dazu muss man die Komponente der Bilder von v_1, v_2 und v_3 bezüglich $\mathcal{B}$ schreiben. Diese sind für $\psi(v_1)$ und $\psi(v_2)$ schon klar. Weiter suchen wir nach λ^1, λ^2 und λ^3, so dass

$$e_1 + (a+2)e_2 + e_3 = \psi(v_3) = \lambda^i v_i.$$

Das heisst,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a+2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^1 + \lambda^3 \\ 2\lambda^1 + \lambda^2 + (1-a)\lambda^3 \\ a\lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Die dritte Gleichung impliziert, dass

$$\lambda^2 = \frac{1}{a}.$$

Aus der ersten Gleichung folgern wir, dass $\lambda^3 = 1 - \lambda^1$. Somit bedeutet die zweite Gleichung

$$a + 2 = 2\lambda^1 + \frac{1}{a} + (1-a)(1-\lambda^1) = (1+a)\lambda^1 + \frac{1}{a} + 1 - a.$$

Dann hat es

$$\lambda^1 = \frac{2a + 1 - \frac{1}{a}}{1 + a} = \frac{2a^2 + a - 1}{a(1 + a)} = \frac{(2a - 1)(a + 1)}{a(1 + a)} = \frac{2a - 1}{a}$$

und somit

$$\lambda^3 = 1 - \frac{2a - 1}{a} = \frac{1 - a}{a}.$$

Daraus folgern wir, dass die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ ist

$$A = \operatorname{Mat}(\psi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{2a-1}{a} \\ 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1-a}{a} \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom von A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & \frac{2a-1}{a} \\ 1 & -\lambda & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1-a}{a} - \lambda \end{bmatrix} = \left(\frac{1 - a}{a} - \lambda \right) (\lambda^2 - 1).$$

Die Eigenwerte von A sind dann $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ und $\lambda = \frac{1-a}{a}$. Es kann der Fall sein, dass der Eigenwert $\lambda = \frac{1-a}{a}$ gleich 1 oder -1. Das passiert wenn und nur wenn

$$\left(\frac{1 - a}{a} \right)^2 = 1 \iff 1 - 2a + a^2 = a^2 \iff a = \frac{1}{2}.$$

Das heisst, dass für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, \frac{1}{2}\}$ die lineare Transformation ψ drei verschiedliche Eigenwerte besitzt und ist deshalb diagonalisierbar (die selbe Begründung wie bei Aufgabe 1(c) gilt).
Sonst, wenn $a = \frac{1}{2}$, dann hat es

$$\frac{1 - a}{a} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - 1 = 1.$$

Deshalb hat der Eigenwert 1 Vielfachheit 2 und ist ψ diagonalisierbar, wenn und nur wenn $\dim(E_1) = 2$. Wir berechnen

$$E_1 = \ker \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da die Matrix Rang 2 hat, gilt es $\dim(E_1) = 3 - 2 = 1$. Infolgedessen ist ψ nicht diagonalisierbar, wenn $a = \frac{1}{2}$.