Prof. Dr. Özlem Imamoglu

Musterlösung der Serie 6

Linearformen, der Dualvektorraum

1. Sei V ein Vektorraum. Zeige, dass der Dualraum

$$V^* := \{\text{alle Linearformen } \alpha : V \to \mathbb{R}\}$$

von V ebenfalls ein Vektorraum ist.

Lösung: Wir definieren die Addition zweier Linearformen $\alpha, \beta \in V^*$ durch

$$\alpha + \beta \in V^*, \text{ so dass } (\alpha+\beta)(v) := \alpha(v) + \beta(v) \ \ \forall v \in V.$$

Die Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir durch

$$\lambda\alpha \in V^*, \text{ so dass } (\lambda\alpha)(v) := \lambda\alpha(v) \ \ \forall v \in V.$$

Mit diesen Definitionen gilt:

(1) Assoziativität von $+$: Es gilt $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$, da

$$\begin{aligned}((\alpha+\beta)+\gamma)(v) &= (\alpha+\beta)(v) + \gamma(v) = \alpha(v) + \beta(v) + \gamma(v) = \alpha(v) + (\beta+\gamma)(v) \\ &= (\alpha + (\beta+\gamma))(v) \ \ \forall v \in V \text{ und } \forall \alpha, \beta, \gamma \in V^*.\end{aligned}$$

(2) Kommutativität von $+$: Es gilt $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, da

$$(\alpha+\beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v) = \beta(v) + \alpha(v) = (\beta+\alpha)(v) \ \ \forall v \in V \text{ und } \forall \alpha, \beta \in V^*.$$

(3) Existenz des Nullvektors: Es gilt $0_{V^*} \in V^*$ mit $0_{V^*}(v) = 0 \ \ \forall v \in V$. Deshalb gilt $\alpha + 0_{V^*} = \alpha \ \ \forall \alpha \in V^*$, da

$$(\alpha + 0_{V^*})(v) = \alpha(v) + 0_{V^*}(v) = \alpha(v) \ \ \forall \alpha \in V^*.$$

(4) Existenz des Additiven Inversen: Es existiert $-\alpha \in V^* \quad \forall \alpha \in V^*$ definiert durch $(-\alpha)(v) = -\alpha(v)$, so dass

$$\alpha + (-\alpha) = 0, \ \text{ da gilt } \ (\alpha + (-\alpha))(v) = \alpha(v) + (-\alpha)(v) = \alpha(v) - \alpha(v) = 0.$$

(5) Gemischte Assoziativität der Skalarmultiplikation: Es gilt $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\forall \alpha \in V^*$, da gilt

$$(\lambda(\mu\alpha))(v) = \lambda(\mu\alpha)(v) = \lambda(\mu\alpha(v)) = (\lambda\mu)\alpha(v) = ((\lambda\mu)\alpha)(v) \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ und } \forall \alpha \in V^*.$$

(6) Neutralität des Einselements $1 \in \mathbb{R}$: Es gilt $1\alpha = \alpha \;\; \forall \alpha \in V^*$, da

$$(1\alpha)(v) = 1\alpha(v) = \alpha(v) \;\; \forall v \in V.$$

(7) Linksdistributivität der Skalarmultiplikation über $+$: Es gilt $\lambda(\alpha+\beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta \;\; \forall \alpha, \beta \in V^* \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$, da

$$\begin{aligned}(\lambda(\alpha+\beta))(v) &= \lambda(\alpha+\beta)(v) = \lambda(\alpha(v)+\beta(v)) = \lambda\alpha(v) + \lambda\beta(v) = (\lambda\alpha)(v) + (\lambda\beta)(v) \\ &= (\lambda\alpha + \lambda\beta)(v) \;\; \forall v \in V \text{ und } \forall \alpha, \beta \in V^* \; \forall \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(8) Rechtsdistributivität der Skalarmultiplikation über $+$: Es gilt

$$(\lambda+\mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; \forall \alpha \in V^*,$$

da

$$\begin{aligned}((\lambda+\mu)\alpha)(v) &= (\lambda+\mu)\alpha(v) = \lambda\alpha(v) + \mu\alpha(v) = (\lambda\alpha)(v) + (\mu\alpha)(v) \\ &= (\lambda\alpha + \mu\alpha)(v) \;\; \forall v \in V \text{ und } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; \forall \alpha \in V^*.\end{aligned}$$

Somit sind mit den obigen beiden Definitionen von $+$ und der Skalarmultiplikation alle 8 Vektorraumaxiome für V^* erfüllt und damit ist V^* ein Vektorraum.

2. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$. Sei $\{e_0, \ldots, e_3\}$ die Standardbasis von V, wobei $e_i := x^i$. Gegeben sind auch die folgenden Linearformen $V \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\eta^0(f(x)) &:= f(0), \qquad & \eta^1(f(x)) &:= f(1), \\ \eta^2(f(x)) &:= f(2), \qquad & \eta^3(f(x)) &:= f(3).\end{aligned}$$

   (a) Erkläre, warum die bei Aufgabe 2 der Serie 5 definierte Basis $\mathcal{T} := \{\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ von V^* nicht die Dualbasis von $\{e_0, \ldots, e_3\}$ ist und finde eine Basis $\tilde{\mathcal{E}}$ von V dessen Dualbasis $\mathcal{T}$ ist.
   (b) Zeige, dass $\mathcal{C} = \{\eta^0, \ldots, \eta^3\}$ eine Basis von V^* ist.
   (c) Bestimme welche Basis $\mathcal{B}$ von V die Eigenschaft $\mathcal{B}^* = \mathcal{C}$ erfüllt.

Lösung:

   (a) Wegen Aufgabe 2(a) von Serie 5 gilt es

$$\theta^I(e_J) = \delta^I_J J!$$

   Also gilt $\theta^2(e_2) = 2$ und $\theta^3(e_3) = 3! = 6$, was die Definition von Dualbasis wiederspricht.

Sei $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ die gewünschte Basis. Um die Gleichungen

$$\theta^I(\tilde{e}_J) \stackrel{!}{=} \delta^I_J = \frac{1}{J!}\theta^I(e_J)$$

zu garantieren, muss man $\tilde{e}_J := \frac{e_J}{J!}$ definieren. Also gilt es

$$\tilde{\mathcal{E}} = \left\{e_0, e_1, \frac{e_2}{2}, \frac{e_3}{6}\right\} = \left\{1, x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{6}\right\}.$$

(b) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sei $\eta^a \in V^*$ die Linearform, die durch $\eta^a(f) = f(a)$ definiert ist. Offensichtlich ist diese Notation mit der Definition von $\eta^0, \ldots, \eta^3$ auf dem Aufgabenblatt konsequent. Dann berechnen wir den Koordinatenvektor

$$[\eta^a]_{\mathcal{E}^*} = [\eta^a(1)\ \eta^a(x)\ \eta^a(x^2)\ \eta^a(x^3)] = [1\ a\ a^2\ a^3].$$

Die vier Linearformen $\eta^0, \ldots, \eta^3$ bilden eine Basis des vierdimensionellen Vektoraums V^*, wenn und nur wenn die folgende Matrix invertierbar ist:

$$[\eta^i(e_j)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

Das ist doch der Fall, weil die Determinante nicht gleich Null ist:

$$\det[\eta^i(e_j)] = 1 \cdot (108 + 24 + 18 - 12 - 72 - 54) = 12 \neq 0.$$

(c) Man kann direkt versuchen, Polynome b_0, b_1, b_2, b_3 zu finden, die die Eigenschaft $\eta^i(b_j) = \delta^i_j$ erfüllen. Dazu hilft es zu wissen, dass für jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ und $a \in \mathbb{R}$, die Gleichung $f(a) = 0$ gilt wenn und nur wenn ein Polynom $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ existiert, so dass $f(x) = (x-a)g(x)$.

Um das zu beweisen, kann man f durch $(x-a)$ teilen. Der Rest muss Grad 0 haben. Dann hat es $f(x) = (x-a)g(x) + r$. Insbesondere gilt diese Gleichung für $x = a$, was impliziert $f(a) = (a-a)g(a) + r = r$. Also kann man $f(x) = (x-a)g(x)$ schreiben, wenn und nur wenn $f(a) = 0$.

Das gesuchte Polynom b_0 muss $0 = \eta^i(b_0(x)) = b_0(i)$ für $i = 1, 2, 3$ erfüllen. Dann kann man $b_0(x) = (x-1)g(x)$ schreiben. Weiter hat es $0 = b_0(2) = (2-1)g(2)$, was bedeutet, dass $g(2) = 0$, so dass man $g(x) = (x-2)h(x)$ schreiben kann. Daraus folgern wir, dass $b_0 = (x-1)(x-2)h(x)$ gilt. Zum Schluss hat es $0 = b_0(3) = (3-1)(3-2)h(3)$, was bedeutet, dass $h(3) = 0$, so dass $h(x) = (x-3)\ell_0(x)$ und die folgende Gleichung gilt:

$$b_0(x) = \ell_0 \cdot (x-1)(x-2)(x-3).$$

Oben haben wir bemerkt, dass f maximal Grad 3 besitzen kann, so dass ℓ_0 konstant sein muss. Das Polynom b_0 muss auch die Bedingung $1 = \eta^0(b_0) = b_0(0)$ erfüllen. Das bedeutet, dass

$$1 = \ell_0(0-1)(0-2)(0-3) = -6\ell_0 \iff \ell_0 = -\frac{1}{6}.$$

Um b_1, b_2 und b_3 zu finden, folgen wir die selbe Strategie. Wie oben für b_0 gemacht kann man beweisen, dass $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathbb{R}$ existieren, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
b_1(x) &= \ell_1 x(x-2)(x-3) \\
b_2(x) &= \ell_2 x(x-1)(x-3) \\
b_3(x) &= \ell_3 x(x-1)(x-2)
\end{aligned}$$

Durch $1 = \eta^i(b_i(x)) = b_i(i)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
1 = b_1(1) = \ell_1 \cdot 1 \cdot (1-2)(1-3) &\iff \ell_1 = \frac{1}{2} \\
1 = b_2(2) = \ell_2 \cdot 2 \cdot (2-1)(2-3) &\iff \ell_2 = -\frac{1}{2} \\
1 = b_3(3) = \ell_3 \cdot 3 \cdot (3-1)(3-2) &\iff \ell_3 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Wir haben die gewünschte Basis $\mathcal{B} = \{b_0(x), b_1(x), b_2(x), b_3(x)\}$ gefunden. Die lautet

$$\begin{aligned}
b_0(x) &= -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{11}{6}x + 1 \\
b_1(x) &= \frac{1}{2}x(x-2)(x-3) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \\
b_2(x) &= -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}x \\
b_3(x) &= \frac{1}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x.
\end{aligned}$$

Lösung durch Basiswechsel: Sei $L_{\mathcal{BE}}$ die Wechselmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$. Dann hat es wegen der Kontravarianz

$$\mathcal{C} = \mathcal{B}^* = L_{\mathcal{BE}}^{-1}\mathcal{E}^*.$$

Jede beide Seiten besteht aus einem Spaltenvektor mit 4 Linearformen. Wenden wir diese auf die Standarbasisvektoren, bekommen wir

$$[\eta^i(e_j)] = \mathcal{C}(\mathcal{E}) = L_{BE}^{-1}\mathcal{E}^*(\mathcal{E}) = L_{BE}^{-1},$$

was bedeutet, dass

$$L_{BE} = [\eta^i(e_j)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Die Inverse kann man z.B. durch Gauss-Reduktion berechnen. Die Spaltenvektoren der Matrix $L_{\mathcal{BE}}$ sind die Komponenten von $b_0, \dots, b_3$ bezüglich der Standardbasis $\{1, x, x^2, x^3\}$ von V und stimmen mit den durch den anderen Lösungsweg gefundenen Basisvektoren.

3. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$. Sei $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_3\}$ die Standardbasis von V, wobei $e_i := x^i$. Sei weiter $\omega \in V^*$ die Linearform, welche durch

$$\begin{aligned} \omega : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &\mapsto \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_0^2 (x-1)f'(x)dx \end{aligned}$$

definiert ist. Bestimme die Koordinatenvektoren $[\omega]_{\mathcal{E}^*}$ und $[\omega]_{\mathcal{C}}$, wo $\mathcal{C}$ ist die bei Aufgabe 2 definierte Basis.

Lösung: Es hat

$$\begin{aligned} \omega(1) &= \int_{-1}^{1} dx - \int_0^2 (x-1)\cdot 0 = 2 \\ \omega(x) &= \int_{-1}^{1} xdx - \int_0^2 (x-1)dx = \int_{-1}^{1} xdx - \int_{-1}^{1} xdx = 0 \\ \omega(x^2) &= \int_{-1}^{1} x^2dx - \int_0^2 2x(x-1)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=-1}^{x=1} - \left[\frac{2x^3}{3} - x^2\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{16}{3} + 4 = -\frac{2}{3} \\ \omega(x^3) &= \int_{-1}^{1} x^3dx - \int_0^2 (x-1)3x^2dx = 0 - \left[\frac{3}{4}x^4 - x^3\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2} \\ &= -12 + 8 = -4 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$[\omega]_{\mathcal{E}^*} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{2}{3} & -4 \end{bmatrix}.$$

Wir möchten jetzt die Koordinaten von ω bezüglich $\mathcal{C}$, das heisst, $\omega_0, \dots, \omega_3 \in \mathbb{R}$ so dass $\omega = \omega_i \eta^i$. Das ist genau der Fall, wenn für alle $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ die Gleichung $\omega(e_j) = \omega_i \eta^i(e_j)$ gilt, das heisst:

$$[\omega(e_0)\ \omega(e_1)\ \omega(e_2)\ \omega(e_2)] = [\omega_0\ \omega_1\ \omega_2\ \omega_3][\eta^i(e_j)]. \tag{1}$$

Wenn man bei Aufgabe 3(c) die Inverse von $[\eta^i(e_j)]$ schon gefunden hat, kann man direkt berechnen

$$\begin{aligned}[\omega_0\ \omega_1\ \omega_2\ \omega_3] &= [\omega(e_0)\ \omega(e_1)\ \omega(e_2)\ \omega(e_2)][\eta^i(e_j)]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix}2 & 0 & -\frac{2}{3} & -4\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Alternativ kann man die Gleichung (1) transponieren

$$[\eta^i(e_j)]^T \begin{bmatrix}\omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -4 \end{bmatrix}$$

und das folgende Linearsystem lösen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 8 & 27 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 6 & 24 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & +\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & +\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right].$$

So bekommt man wieder

$$[\omega]_{\mathcal{C}} = [\omega_i] = \left[2\ -\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ -\frac{1}{3}\right].$$

4. Gegeben sind die drei Vektoren

$$b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},\ b_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix},\ b_3 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Zeigt, dass $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von V definiert.

   (b) Sei $\mathcal{B}^* := \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ die Dualbasis von $\mathcal{B}$. Berechne $\beta^i(v^j e_j)$ für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ und $v^j \in \mathbb{R}$. Hier ist $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

   (c) Finde die Koordinatenvektoren $[\beta^i]_{\mathcal{E}^*}$ für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$.

(d) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Linearformen, welche durch

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}\right) = x^1 + ax^3 \text{ und } \gamma\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}\right) = (a-1)x^2 + x^3$$

definiert sind. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist $\{\alpha, \beta^2, \gamma\}$ eine Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$?

Lösung:

(a) Es hat

$$\det[b_1\ b_2\ b_3] = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot (15-1) - 1 \cdot (0+10) = 4 \neq 0.$$

Dann ist $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis.

(c) Wegen der Kontravarianz der Dualbasis hat es

$$\mathcal{B}^* = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}\mathcal{E}^*.$$

Wir berechnen die Inverse

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 14 & -2 & 10 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

und erhalten somit

$$\begin{bmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2}\varepsilon^1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{5}{4}\varepsilon^3 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon^1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^3 \\ \frac{5}{2}\varepsilon^1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{5}{4}\varepsilon^3 \end{bmatrix}.$$

Hier ist $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\} = \mathcal{E}^*$ die Dualbasis der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Die obige Gleichung bedeutet, dass

$$\begin{aligned} [\beta^1]_{\mathcal{E}^*} &= \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \\ [\beta^2]_{\mathcal{E}^*} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ [\beta^3]_{\mathcal{E}^*} &= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Nach (c) berechnen wir

$$\begin{aligned} \beta^1(v^j e_j) &= \left(\frac{7}{2}\varepsilon^1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{5}{4}\varepsilon^3\right)(v^j e_j) = \frac{7}{2}v^1 - \frac{1}{4}v^2 + \frac{5}{4}v^3 \\ \beta^2(v^j e_j) &= \left(-\frac{1}{2}\varepsilon^1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^3\right)(v^j e_j) = -\frac{1}{2}v^1 + \frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{4}v^3 \\ \beta^3(v^j e_j) &= \left(\frac{5}{2}\varepsilon^1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{5}{2}\varepsilon^3\right)(v^j e_j) = \frac{5}{2}v^1 - \frac{1}{4}v^2 + \frac{5}{4}v^3. \end{aligned}$$

(d) Per Definition gilt es

$$[\alpha]_{\mathcal{E}^*} = [1\ 0\ a]$$

und

$$[\gamma]_{\mathcal{E}^*} = [0\ a-1\ 1].$$

Den Koordinatenvektor $[\beta^2]_{\mathcal{E}^*}$ haben wir bei (c) gefunden. Dann ist $\{\alpha, \beta^2, \gamma\}$ eine Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$, wenn und nur wenn

$$0 \neq \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & a-1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Das heisst, wenn und nur wenn $0 \neq \frac{1}{4}(1+a-1) - \frac{1}{2}a(a-1)$. Die Ungleichung kann man schnell lösen:

$$0 \neq \frac{1}{4}(1+a-1) - \frac{1}{2}a(a-1) \iff 0 \neq \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$$
$$\iff 0 \neq a - 2a^2 + 2a \iff 0 \neq (2a+3)a \iff \left(a \neq 0 \land a \neq -\frac{3}{2}\right).$$

Die Menge $\{\alpha, \beta^2, \gamma\}$ ist dann eine Basis, wenn und nur wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{3}{2}\}$.