

Musterlösung der Serie 7

BILINEARFORMEN

1. Sei $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) := \{\text{alle Bilinearformen } V \times V \rightarrow \mathbb{R}\}$. Zeige, dass $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ ein Vektorraum ist.

Hinweis: Zeige, dass $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum vom Vektorraum aller Abbildungen $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

Lösung: Wir wissen, dass die Menge $\text{Abb}(V \times V, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ein Vektorraum ist. Der Nullvektor ist die Nullabbildung $0, \forall x \in V \times V, 0(x) := 0$. Die Addition und Skalarmultiplikation sind für alle $f, g \in \text{Abb}(V \times V, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in V \times V, (f + g)(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \\ \forall \mathbf{x} \in V \times V, (\lambda \cdot f)(\mathbf{x}) &= \lambda \cdot (f(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

definiert.

Wir zeigen, dass $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) \subset \text{Abb}(V \times V, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum ist, das heißt, dass $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ abgeschlossen bezüglich der oben definierten Operationen ist. Es genügt dann zu zeigen, dass $f + \lambda g \in \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ für alle $f, g \in \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt¹. Für alle $u, v, w \in V$ und $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ hat es

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(u, \mu v + \nu w) &\stackrel{(*)}{=} f(u, \mu v + \nu w) + \lambda g(u, \mu v + \nu w) \\ &= \mu f(u, v) + \nu f(u, w) + \lambda(\mu g(u, v) + \nu g(u, w)) \\ &\stackrel{(**)}{=} \mu(f(u, v) + \lambda g(u, v)) + \nu(f(u, w) + \lambda g(u, w)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \mu(f + \lambda g)(u, v) + \nu(f + \lambda g)(u, w) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(\mu v + \nu w, u) &= f(\mu v + \nu w, u) + \lambda g(\mu v + \nu w, u) \\ &= \mu f(v, u) + \nu f(w, u) + \lambda(\mu g(v, u) + \nu g(w, u)) = \dots \\ &= \mu(f + \lambda g)(v, u) + \nu(f + \lambda g)(w, u). \end{aligned}$$

Oben haben wir bei (*) die Definition von $f + \lambda g$ und bei (**) die Bilinearität von f und g benutzt. Aus der obenen Gleichungen folgern wir, dass $f + \lambda g$ eine Bilinearform ist, was zu beweisen war.

¹Nämlich bekommt man für $\lambda = 1$ die Summe zwei beliebiger elementen von $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ und für $f = 0$ eine beliebige Skalarmultiplikation eines beliebigen Elementes von $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$.

2. Gegeben ist einen n -dimensionalen Vektorraum V , eine Basis \mathcal{B} von V und zwei Linearformen $\eta, \theta \in V^*$ mit Koordinatenvektoren

$$[\eta]_{\mathcal{B}^*} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_n] \text{ und } [\theta]_{\mathcal{B}^*} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n].$$

Sei $B = \eta \otimes \theta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Bestimme die Matrixdarstellung von B bezüglich \mathcal{B} und zeige, dass diese Matrix Rang ≤ 1 hat.

Lösung: Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ die gegebene Basis und $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \dots, \beta^n\}$ ihre Dualbasis, mit $\beta^i(b_j) = \delta_j^i$. Dann gilt es

$$\eta(b_j) = \eta_i \beta^i(b_j) = \eta_i \delta_j^i = \eta_j$$

und

$$\theta(b_j) = \theta_i \beta^i(b_j) = \theta_i \delta_j^i = \theta_j.$$

Die Matrixdarstellung $M = (B_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ von B bezüglich \mathcal{B} ist definiert durch

$$B_{i,j} = B(b_i, b_j) = (\eta \otimes \theta)(b_i, b_j) = \eta(b_i) \cdot \theta(b_j) = \eta_i \theta_j,$$

das heisst

$$M = \begin{bmatrix} \eta_1 \theta_1 & \eta_1 \theta_2 & \dots & \eta_1 \theta_n \\ \eta_2 \theta_1 & \eta_2 \theta_2 & \dots & \eta_2 \theta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_n \theta_1 & \eta_n \theta_2 & \dots & \eta_n \theta_n \end{bmatrix} = [\eta]_{\mathcal{B}^*}^T \cdot [\theta]_{\mathcal{B}^*}.$$

Da alle Spalten von M proportional sind, erzeugen diese Spalten einen Vektorraum von Dimension ≤ 1 . Also ist der Rang von M nicht grösser als 1. Wir beobachten, dass der Rang genau gleich Null ist, wenn und nur wenn $\eta_i \theta_j = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt, d.h., wenn und nur wenn $\eta = 0$ oder $\theta = 0$.

3. Gegeben ist der Vektorraum $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ der reellen Polynomen vom Grad ≤ 3 , seine Standardbasis \mathcal{E} und die Basis $\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$. Wir betrachten die Abbildung:

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ (f(x), g(x)) \mapsto \int_{-2}^0 f'(x)g(x+1)dx$$

- Zeige, dass B eine bilineare Abbildung auf $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ ist.
- Bestimme die Matrixdarstellung von B bezüglich der Basis \mathcal{E} .
- Bestimme die Matrixdarstellung von B bezüglich der Basis \mathcal{B} .

- (d) Berechne $B((x-1)^3, x^2 - 2x)$.
 (e) Gibt es Linearformen $\eta, \theta \in V^*$, die die Gleichung $B = \eta \otimes \theta$ erfüllen?

Lösung:

- (a) Wegen der Linearität der Differentiation und der Integration und der Abbildung $\tau : V \rightarrow V$, die $\tau : f(x) \mapsto f(x+1)$ schickt, gelten für jede $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $f_1, f_2, f, g_1, g_2, g \in \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} B(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) &= \int_{-2}^0 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x) g(x+1) dx \\ &= \int_{-2}^0 (\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2')(x) g(x+1) dx \\ &= \int_{-2}^0 (\lambda_1 f_1'(x) g(x+1) + \lambda_2 f_2'(x) g(x+1)) dx = \\ &= \lambda_1 \int_{-2}^0 f_1'(x) g(x+1) dx + \lambda_2 \int_{-2}^0 f_2'(x) g(x+1) dx \\ &= \lambda_1 B(f_1, g) + \lambda_2 B(f_2, g). \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) &= \int_{-2}^0 f'(x) (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x+1) dx \\ &= \int_{-2}^0 f'(x) (\lambda_1 g_1(x+1) + \lambda_2 g_2(x+1)) dx \\ &= \lambda_1 \int_{-2}^0 f'(x) g_1(x+1) dx + \lambda_2 \int_{-2}^0 f'(x) g_2(x+1) dx \\ &= \lambda_1 B(f, g_1) + \lambda_2 B(f, g_2). \end{aligned}$$

- (b) Wir möchten alle Werte $B(x^\ell, x^k)$ mit $0 \leq \ell, k \leq 3$ berechnen. Durch die Substitution $x \mapsto x-1$ bekommt man

$$B(f(x), g(x)) = \int_{-2}^0 f'(x) g(x+1) dx = \int_{-1}^1 f'(x-1) g(x) dx.$$

Ausserdem wissen wir, dass es für alle $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\int_{-1}^1 x^k = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{k+1} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist} \\ \frac{2}{k+1} & \text{falls } k \text{ gerade ist} \end{cases}$$

gilt. Dann berechnen wir

$$\begin{aligned}
 B(1, x^k) &= \int_{-2}^0 0 \cdot (x+1)^k dx = 0 \\
 B(x, x^k) &= \int_{-1}^1 1 \cdot x^k dx = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k \text{ ungerade ist} \\ 2 & \text{für } k = 0 \\ \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{k+1} & \text{für } k = 2 \end{cases} \\
 B(x^2, x^k) &= \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dx}(x-1)^2 \right) x^k dx = 2 \int_{-1}^1 (x-1)x^k dx \\
 &= 2 \int_{-1}^1 x^{k+1} - x^k dx = \begin{cases} -\frac{4}{k+1} & \text{falls } k \text{ gerade ist} \\ \frac{4}{k+2} & \text{falls } k \text{ ungerade ist} \end{cases} \\
 B(x^3, x^k) &= \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dx}(x-1)^3 \right) x^k dx = 3 \int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 1)x^k dx \\
 &= 3 \int_{-1}^1 (x^{k+2} - 2x^{k+1} + x^k) dx = \begin{cases} \frac{6}{k+3} + \frac{6}{k+1} & \text{falls } k \text{ gerade ist} \\ -\frac{12}{k+2} & \text{falls } k \text{ ungerade ist} \end{cases}
 \end{aligned}$$

und tragen die Resultate in die Matrixdarstellung $A = (B(x^i, x^j))_{0 \leq i, j \leq 3}$ von B bezüglich \mathcal{E} ein:

$$\begin{aligned}
 A = (B(x^i, x^j)) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{0+1} & \frac{4}{1+2} & -\frac{4}{2+1} & \frac{4}{3+2} \\ \frac{6}{0+3} + \frac{6}{0+1} & -\frac{12}{1+2} & \frac{6}{2+3} + \frac{6}{2+1} & -\frac{12}{3+2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -4 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{5} \\ 8 & -4 & \frac{16}{5} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

- (c) Sei C die Matrixdarstellung von B bezüglich \mathcal{B} und $L = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ die Transformationsmatrix von \mathcal{E} nach \mathcal{B} . Dann gilt es

$$C = L^T A L.$$

Die Transformationsmatrix haben wir bei Serie 1, Aufgabe 3 berechnet:

$$L = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deshalb hat es

$$\begin{aligned}
 C = L^T A L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -4 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{5} \\ 8 & -4 & \frac{16}{5} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \frac{8}{3} & -4 \\ -4 & \frac{16}{3} & -8 & \frac{64}{5} \\ 8 & -12 & \frac{96}{5} & -32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \frac{8}{3} & -4 \\ -8 & \frac{28}{3} & -\frac{40}{3} & \frac{104}{5} \\ 26 & -34 & \frac{256}{5} & -\frac{412}{5} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(d) Es hat

$$\begin{aligned}
 B((x-1)^3, x^2 - 2x) &= B((x-1)^3, (x-1)^2 - 1) \\
 &= B((x-1)^3, (x-1)^2) - B((x-1)^3, 1) \stackrel{(*)}{=} \frac{256}{5} - 26 = \frac{126}{5}.
 \end{aligned}$$

Bei (*) haben wir die Werte von B aus der bei (c) gefundenen Matrix abgezogen.

(e) Da die erste zwei Spalten von A linear unabhängig sind, muss der Rang von A grösser als 1 sein (tatsächlich, hat es $\text{Rang}(A) = 3$). Bei Aufgabe 2 wäre der Rang von A nicht grösser als 1, wenn B das Tensorprodukt zwei Linearformen wäre. Das impliziert, dass es keine Linearformen $\eta, \theta \in V^*$ gibt, die $B = \eta \otimes \theta$ erfüllen.

4. Gegeben sind die zwei Basen von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

und

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sei weiter $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung, die $(A, B) \mapsto \text{Spur}(A^T B)$ schickt. Berechne die Matrixdarstellung von T bezüglich \mathcal{E} und die Matrixdarstellung von T bezüglich \mathcal{B} .

Lösung: Wir bezeichnen

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir bemerken, dass für jede $i, j, k, \ell \in \{1, 2\}$ die Gleichung

$$E_{ij} E_{jk} = E_{ik}$$

gilt und $E_{ij}E_{\ell k} = 0$ wenn $j \neq \ell$. Ausserdem hat es $E_{ij}^T = E_{ji}$. Somit erhalten wir

$$T(E_{ij}, E_{k\ell}) = \text{Spur}(E_{ji}E_{k\ell}) = \text{Spur}(\delta_{i,k}E_{j\ell}) = \delta_{i,k}\text{Spur}(E_{j\ell}) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}.$$

Bei der letzten Gleichung haben wir bemerkt, dass die Spur von $E_{j\ell}$ nicht Null ist, wenn und nur wenn der Eintrag (j, ℓ) auf der Hauptdiagonal liegt. Also ist die Matrixdarstellung von T bezüglich \mathcal{E} durch die 4×4 Einheitsmatrix gegeben.

Um die Matrixdarstellung von T bezüglich \mathcal{B} zu finden, berechnen wir die Transformationsmatrix

$$L = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist die Matrixdarstellung von T bezüglich \mathcal{B} gegeben durch die Matrix

$$L^T \cdot \text{Id} \cdot L = L^T L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} & \frac{21}{4} \end{bmatrix}.$$