Musterlösung der Serie 9

INNERE PRODUKTE, REZIPROKE BASEN

1. Sei V ein Vektorraum von der Dimension n. Gegeben sind zwei Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}$ von V und ein inneres Produkt g auf V, für welches die Basis $\mathcal{B}$ orthonormal ist.

   (a) Zeige, dass die Transformationsmatrix $L = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = (L^i_j)$ gegeben ist durch
   $$L^i_j = g(\tilde{b}_j, b_i).$$

   (b) Nehmen wir an, dass die Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ auch orthonormal bezüglich g ist. Zeige, dass die Gleichungen $L^T L = \mathrm{Id} = LL^T$ gelten. Das bedeutet, dass L eine *orthogonale* Matrix ist. [*Hinweis:* Es hat $\delta_{i,j} = g(\tilde{b}_j, \tilde{b}_i)$. Schreib den zweiten Vektor als Linearkombination von $b_1, \dots, b_n$.]

   Lösung:

   (a) *Erster Lösungsweg:* Wir benutzen die Basiswechselformel $\tilde{b}_j = L^k_j b_k$ und berechnen
   $$g(\tilde{b}_j, b_i) = g(L^k_j b_k, b_i) = L^k_j g(b_k, b_i) = L^k_j \delta_{i,k} = L^i_j.$$

   Zweiter Lösungsweg: Per Definition gilt es
   $$L = ([\tilde{b}_1]_{\mathcal{B}} \dots [\tilde{b}_n]_{\mathcal{B}}]$$

   Für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ist dann L^i_j die i-te Koordinate von $\tilde{b}_j$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass diese Nummer gleich $g(\tilde{b}_j, b_i)$ ist.

   (b) Da $\tilde{\mathcal{B}}$ auch orthonormal ist, gilt es
   $$\delta_{i,j} = g(\tilde{b}_j, \tilde{b}_i).$$

   Wir verwenden die Basiswechselformel auf der zweite Komponente:
   $$\delta_{i,j} = g(\tilde{b}_j, \tilde{b}_i) = g(\tilde{b}_j, L^k_i b_k) = L^k_i g(\tilde{b}_j, b_k).$$

   Wir möchten jetzt den Term $g(\tilde{b}_j, b_k)$ durch L^k_j nach Teil (a) substituieren. Da der summierte Index k danach zweimal oben erscheinen würden, sollten wir die Summe ohne Einsteinsche Summenkonvention schreiben. Somit erhalten wir

$$\delta_{i,j} = \sum_{K=1}^{n} L_i^K g(\tilde{b}_j, b_K) = \sum_{K=1}^{n} L_i^K L_j^K = (L^T L)^i_j.$$

Daraus folgern wir, dass $L^T L = \mathrm{Id}$ gilt. Das ist die erste gewünschte Gleichung. Wenn man die beide Seiten der letzten Gleichung invertiert, bekommt man dann

$$(L^T L)^{-1} = \mathrm{Id}^{-1},$$

was äquivalent ist zu

$$L^{-1}(L^T)^{-1} = \mathrm{Id}.$$

Indem man beide Seite von links mit L und von rechts mit L^T multipliziert, erhalt man die zweite gewünschte Gleichung

$$\mathrm{Id} = LL^T.$$

2. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\geqslant 3}$ der Vektorraum der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 3$. Gegeben sind die Basen

$$\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\},\ \mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\},\ \mathcal{F} = \{x^3, x^2, x, 1\}$$

und das innere Produkt g auf V für welches die Basis $\mathcal{B}$ orthonormal ist.

(a) Finde die Matrixdarstellung von g bezüglich der Basis $\mathcal{E}$.

(b) Wende das Gram-Schmidt Verfahren auf der Basis $\mathcal{F}$ an, um eine (weitere) orthonormale Basis $\mathcal{C}$ bezüglich g und finden.

(c) Bestimme die Trasformationsmatrix $L = L_{\mathcal{CB}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$. Überprüfe, dass L orthogonal ist. [*Hinweis:* Du kannst die folgende Tatsache verwenden, ohne sie zu beweisen: Eine Matrix ist orthogonal, wenn und nur wenn ihre Spalten bezüglich des Standardprodukts eine orthonormale Basis bilden.]

Lösung:

(a) Die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ haben wir schon bei Serie 1, Aufgabe 3 gefunden, obwohl die Basen wurden dort anders genannt. Es ist

$$L_{\mathcal{EB}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist die Matrixdarstellung von g bezüglich der Basis $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
[g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*} &= L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^T \cdot [g]_{\mathcal{B}^*\otimes\mathcal{B}^*} \cdot L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^T \cdot \mathrm{Id} \cdot L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Wir schreiben $f_j = x^{3-j}$, so dass $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$. Sei $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ die gewünschte orthonormale Basis. Wir berechnen mittels der bei (a) gefundenen Matrix $[g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*}$:

$$||f_0|| = \sqrt{g(x^3, x^3)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$c_0 = \frac{f_0}{||f_0||} = \frac{x^3}{2\sqrt{5}} \text{ (Normalisierung von } f_0\text{)}$$

$$\begin{aligned}
f_1^\perp &= x^2 - g\left(x^2, \frac{x^3}{2\sqrt{5}}\right)\frac{x^3}{2\sqrt{5}} = x^2 - 10\frac{x^3}{20} = x^2 - \frac{1}{2}x^3 \text{ (Orthog. von } f_1\text{)} \\
||f_1^\perp|| &= \sqrt{g\left(x^2 - \frac{x^3}{2}, x^2 - \frac{x^3}{2}\right)} = \sqrt{g(x^2, x^2) - 2\cdot\frac{1}{2}g(x^2, x^3) + \frac{1}{4}g(x^3, x^3)} \\
&= \sqrt{6 - 10 + 5} = 1 \\
c_1 &= \frac{f_1^\perp}{||f_1^\perp||} = f_1^\perp = x^2 - \frac{1}{2}x^3 \text{ (Norm. von } f_1^\perp\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2^\perp &= x - g\left(x, x^2 - \frac{1}{2}x^3\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) - g\left(x, \frac{x^3}{2\sqrt{5}}\right)\frac{x^3}{2\sqrt{5}} \\
&= x - \left(3 - \frac{1}{2}\cdot 4\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) - \frac{1}{20}\cdot 4x^3 = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{5}x^3 \\
&= x - x^2 + \frac{3}{10}x^3 \text{ (Orthog. von } f_2\text{)} \\
||f_2^\perp|| &= \sqrt{g\left(x - x^2 + \frac{3}{10}x^3, x - x^2 + \frac{3}{10}x^3\right)} \\
&= \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}} = \sqrt{\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\
c_2 &= \frac{f_2^\perp}{||f_2^\perp||} = \sqrt{5}f_2^\perp = \sqrt{5}x - \sqrt{5}x^2 + \frac{3\sqrt{5}}{10}x^3 \text{ (Norm. von } f_2^\perp\text{)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_3^\perp &= 1 - g\left(1, \sqrt{5}x - \sqrt{5}x^2 + \frac{3\sqrt{5}}{10}x^3\right)\left(\sqrt{5}x - \sqrt{5}x^2 + \frac{3\sqrt{5}}{10}x^3\right) + \\
&\qquad - g\left(1, x^2 - \frac{1}{2}x^3\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) - g\left(1, \frac{x^3}{2\sqrt{5}}\right)\frac{x^3}{2\sqrt{5}} \\
&= 1 - \left(\sqrt{5} - \sqrt{5} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\sqrt{5}x - \sqrt{5}x^2 + \frac{3\sqrt{5}}{10}x^3\right) + \\
&\qquad - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) - \frac{x^3}{20} \\
&= 1 - \frac{3 \cdot 5}{10}\left(x - x^2 + \frac{3}{10}x^3\right) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{20}x^3 \\
&= 1 - \frac{3}{2}x + x^2 - \frac{1}{4}x^3 \text{ (Orthog. von } f_3^\perp)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
||f_3^\perp|| &= \sqrt{g\left(1 - \frac{3}{2}x - x^2 - \frac{1}{4}x^3, 1 - \frac{3}{2}x - x^2 - \frac{1}{4}x^3\right)} \\
&= \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}} \\
&= \sqrt{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\
c_3 &= 2\left(1 - \frac{3}{2}x + x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) = 2 - 3x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^3 \text{ (Norm. von } f_3^\perp).
\end{aligned}
$$

Wir haben die folgende orthonormale Basis von V bezüglich g gefunden:

$$
\mathcal{C} = \left\{ \frac{x^3}{2\sqrt{5}}, x^2 - \frac{x^3}{2}, \sqrt{5}x - \sqrt{5}x^2 + \frac{3\sqrt{5}}{10}x^3, 2 - 3x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^3 \right\}
$$

(c) Es hat $\mathcal{C} = \mathcal{B}L_{\mathcal{CB}}$, was heisst, dass es $\mathcal{C}L_{\mathcal{CB}} = \mathcal{B}L_{\mathcal{CE}}L_{\mathcal{BE}}^{-1}$ gilt,wobei $\mathcal{B}$ (bzw., $\mathcal{C}$) bezeichnet hier eigentlich $L_{\mathcal{BE}}$ (bzw., $L_{\mathcal{CE}}$).

$$
L = L_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & -3 \\ 0 & 1 & -\sqrt{5} & 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

Wir bemerken, dass das Skalarprodukt je zwei unterschiedlicher Spalten gleich Null ist, und dass jede Spalte Norm 1 bezüglich des Standardprodukt hat. Weiter ist die obige Matrix invertierbar, da sie eine Transformationsmatrix zwischen zwei Basen ist. Deshalb bilden die Spalten von L eine orthonormale Basis und ist L eine orthogonale Matrix.

3. Gegeben sind die drei Vektoren

$$b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ b_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ b_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Sei g das innere Produkt, bezüglich dessen $\mathcal{B}$ orthonormal ist.

(b) Bestimme die Matrixdarstellung von g bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ bezüglich g.

(d) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{E}^g$ der Standardbasis $\mathcal{E}$ bezüglich g.

(e) Gibt es eine Basis $\mathcal{C}^g = \{c_1, c_2, c_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, dessen reziproke Basis bezüglich g durch $\mathcal{C} = \{c_3, c_2, c_1\}$ gegeben ist?

Lösung:

(a) Es hat

$$\det[b_1 \ b_2 \ b_3] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \neq 0.$$

Dann sind die drei Vektoren b_1, b_2 und b_3 linear unabhängig. Aber $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, so dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ sein muss.

(b) Wir berechnen die Transformationsmatrix

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}[g]_{\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^T \cdot [g]_{\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*} \cdot L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Id} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(c) Da die Basis $\mathcal{B}$ orthonormal bezüglich g ist, gilt es per Definition $\mathcal{B}^g = \mathcal{B}$. Man sollte aber besser die Vektoren von $\mathcal{B}^g$ mit einem obigen Index bezeichnet. Also sagen wir, dass $\mathcal{B}^g = \{b^1, b^2, b^3\}$, wo $b^j := b_j$.

(d) Sei $\mathcal{E}^g := \{e^1, e^2, e^3\}$ die gewünschte Basis. Die Komponenten von e^i schreiben wir auf einer Reihe. Dann gilt es für jede $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\delta_{i,j} = g(e^i, e_j) = [e^i]_{\mathcal{E}}[g]_{\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*}[e_j]_{\mathcal{E}}.$$

Also hat es

$$\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} [e^1]_{\mathcal{E}} \\ [e^2]_{\mathcal{E}} \\ [e^3]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [e_1]_{\mathcal{E}} & [e_2]_{\mathcal{E}} & [e_3]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [e^1]_{\mathcal{E}} \\ [e^2]_{\mathcal{E}} \\ [e^3]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

was heisst, dass

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [e^1]_{\mathcal{E}} \\ [e^2]_{\mathcal{E}} \\ [e^3]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \overset{(*)}{=} (L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^T L_{\mathcal{E}\mathcal{B}})^{-1} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir bemerkt, dass die Matrix $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ schon das Produkt der Inversen von zwei einfachen Matrizen ist. Selbstverständlich kann man sonst die Inverse direkt berechnen.

Also ist die reziproke Basis von $\mathcal{E}$ bezüglich g durch

$$\mathcal{E}^g = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

(e) Nehmen wir an, dass $\mathcal{C}^g = \{c^1, c^2, c^3\}$ die reziproke Basis von $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ ist, wobei $c^1 = c_3$, $c^2 = c_2$ und $c^3 = c_1$. Dann muss $0 = g(c^1, c_3) = g(c_3, c_3)$ und daher $c_3 = 0$ gelten, da g ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^3$ ist. Das widerspricht es aber, dass $\mathcal{C}$ eine Basis ist. Darum existiert keine solche Basis $\mathcal{C}$.