Serie 10

Repetition

1. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der Vektorraum der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 3$. Gegeben sind die Basen

$$\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\},\ \tilde{\mathcal{B}} = \{1, 1+x, 1-x+x^2, 1-x+x^2-x^3\}$$

und die lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit Matrixdarstellung

$$A = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   (a) Berechne $\varphi(2 - 3x + 4x^2 - x^3)$.

   (b) Finde die Transformationsmatrix $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$.

   (c) Finde die Eigenwerte von φ. Ist φ diagonalisierbar? [*Hinweis*: Um das charakteristische Polynom von φ zu berechnen, braucht man die Matrixdarstellung von $\mathcal{B}$ bezüglich der selben Basis an beiden Seiten.]

2. Gegeben ist der Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 2$, die drei Linearformen auf V

$$\beta^0(f(x)) = f(0),\ \beta^1(f(x)) = f'(1),\ \beta^2(f(x)) = f''(2).$$

und die Bilinearform auf V

$$\varphi(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

   (a) Zeige, dass $\mathcal{C} = \{\beta^0, \beta^1, \beta^2\}$ eine Basis des Dualvektorraumes V^* von V ist.

   (b) Finde eine Basis $\mathcal{B}$ von V, dessen Dualbasis gleich $\mathcal{C}$ ist, d.h., $\mathcal{B}^* = \mathcal{C}$.

   (c) Finde die Komponenten von φ bezüglich der Basis $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ von $V^* \otimes V^*$.

3. Sei $a \in \mathbb{R}$. Gegeben sind die 2×2 Matrizen

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 0 \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_4 = \begin{bmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die vier obigen Matrizen eine Basis $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bilden, wenn und nur wenn $a \notin \{1, 2\}$.

(b) Nehmen wir an, dass $a = 0$. Sei g das innere Produkt, für welches $\mathcal{B}$ orthonormal ist. Bestimme die Matrixdarstellung $[g]_{\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

4. Gegeben sind die Vektoren

$$b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ und } b_2 := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

von $\mathbb{R}^2$ und die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ von $\mathbb{R}^2$.

(a) Berechne die Dualbasis $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \beta^2\}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^*$.

(b) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ bezüglich des Standardskalarprodukts $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Abgabetermin: 14.05.2019.