Serie 11

reziproke Basis, kovariante und kontravariante Koordinaten

1. Gegeben sind die Basen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

und das innere Produkt g auf V, für welches $\mathcal{B}$ orthonormal ist (siehe auch Serie 9, Aufgabe 3). Gegeben ist weiter den Vektor

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimme die kontravarianten und kovarianten Koordinaten von v bezuglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.

(b) Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{BC}}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$ und berechne die reziproke Basis $\mathcal{C}^g$.

(c) Berechne die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{C}$.

2. Gegeben sind die vier 2×2 Matrizen

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und das innere Produkt g auf $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, das durch $g(A, B) = \mathrm{Spur}(A^T B)$ definiert ist.

(a) Zeige, dass die Standardbasis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ orthonormal bezüglich g ist und dass die Formel

$$g\left(\begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{bmatrix} \right) = a^{11}b^{11} + a^{12}b^{12} + a^{21}b^{21} + a^{22}b^{22}$$

gilt. [*Hinweis:* Serie 7, Aufgabe 4]

(b) Zeige, dass

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\} \text{ und } \tilde{\mathcal{B}} = \{2B_1 - B_2, B_1 - B_4, B_3 + B_4, B_2 + B_3\}$$

beide Basen von V sind.

(c) Berechne die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$.

(d) Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$ von $\tilde{\mathcal{B}}$ nach $\mathcal{B}$ und die reziproke Basis $\tilde{\mathcal{B}}^g$.

3. Gegeben sind der Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 2$ und seine Basen $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ und $\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, 3 + x, 3x^2\}$.

   Sei g das innere Produkt auf V dessen Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{E}$ gegeben ist durch

$$G = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 6 & 0 \\ \frac{8}{9} & 0 & \frac{28}{9} \end{bmatrix}.$$

   (a) Wende das Gram-Schmidt Verfahren auf $\mathcal{B}$ an, um eine orthonormale Basis $\mathcal{C}$ von V bezüglich g zu finden. Finde dazu die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.

   (b) Bestimme die reziproke Basen $\mathcal{C}^g$ und $\mathcal{B}^g$.

   (c) Bestimme die kovarianten und kontravarianten Koordinaten des Polynoms $f = 3 + x + 3x^2$ bezüglich $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$.

Abgabetermin: 21.05.2019.