Serie 12

Spannungstensoren

1. Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben
$$\sigma = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Bestimme die drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und die drei Hauptspannungsrichtungen $v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, v_{\sigma_3}$ von σ.

2. Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Wieder sei ein Spannungstensor σ bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben
$$\sigma = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$
   (a) Bestimme die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von σ.
   (b) Bestimme eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ bezüglich derer σ von einer Diagonalmatrix dargestellt ist.
   (c) Bestimme die ersten drei Spannungsinvarianten I_1, I_2 und I_3 (Skript Seite 86) des obigen Spannungstensors σ.

3. Wir bezeichnen einen Spannungstensor σ_S als Scherungsdeformation (shear deformation), wenn dessen Spur gleich 0 ist. Ausserdem bezeichnen wir einen Spannungstensor σ_P als hydrostatischen Druck, falls dessen Hauptspannungen alle gleich sind.
   (a) Zeige, dass ein allgemeiner Spannungstensor σ^{ij} immer als Summe einer Scherungsdeformation σ_S^{ij} und eines hydrostatischen Drucks σ_P^{ij} geschrieben werden kann.
   (b) Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben
$$\sigma = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$
   Schreibe den obigen Spannungstensor σ als Summe einer Scherungsdeformation σ_S und eines hydrostatischen Drucks σ_P.

(c*) Finde eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ bezüglich derer die bei (b) gefundenen Scherungsdeformation σ_S durch eine Matrix A beschrieben wird, die auf der Diagonale nur Nullen hat:

$$\exists x, y, z \in \mathbb{R} : A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{bmatrix}.$$

Abgabetermin: 28.05.2019.