Serie 13

Repetition

1. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit
$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$
Weiter ist der Vektor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ gegeben, sowie die Linearabbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die $b_1 \mapsto b_2 + b_3$ bzw. $b_2 \mapsto b_1 + b_3$ bzw. $b_3 \mapsto b_1 + b_2$ schickt.
   (a) Bestimme die Matrixdarstellung von φ bezüglich $\mathcal{B}$.
   (b) Bestimme eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Abbildung φ diagonale Matrixdarstellung besitzt.
   (c) Berechne $\varphi(v)$.
   (d) Berechne die Dualbasis $\mathcal{B}^*$ von $\mathcal{B}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^*$ von $(\mathbb{R}^3)^*$.

2. Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Reflexion an der Linie ℓ gegeben durch
$$x - y + z = 2x - 3y = 0.$$
Finde die Matrixdarstellung $[\psi]_{\mathcal{E}}$ von ψ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

3. (a) Seien $A = (A^i_j)$ und $B = (B^i_j)$ zwei $n \times n$ Matrizen, wobei der obenstehende Index als Zeilenindex, der unterstehende als Spaltenindex gilt. Beweise die Gleichung
$$A^i_j B^j_i = \mathrm{Spur}(AB).$$
   (b) Definiert ist weiter das Kronecker-Delta
$$\delta^{ij} = \delta^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Ordne jeden Term auf der linken Seite dem gleichwertigem Term auf der rechten Seite zu:

v. $A^i_k \delta^k_i \delta^\ell_j B^j_\ell$	e. $\mathrm{Spur}((A^T)B)$
vi. $A^i_k \delta^j_\ell \delta^\ell_j B^k_i$	f. $n \cdot \mathrm{Spur}(AB)$
vii. $A^i_j \delta^{j\ell} \delta_{\ell k} B^k_i$	g. $\mathrm{Spur}(A) \cdot \mathrm{Spur}(B)$
viii. $A^k_\ell \delta^{i\ell} \delta_{jk} B^j_i$	h. $\mathrm{Spur}(AB)$

4. Gegeben sind die Matrizen

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und die Linearformen auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2 Matrizen

$$\begin{aligned} \beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta^4 &: V \to \mathbb{R} \\ \beta^1\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= d \\ \beta^2(A) &= \operatorname{Spur}(E_2 \cdot A) \\ \beta^3(A) &= \operatorname{Spur}(A \cdot E_3 - E_1 \cdot A) \\ \beta^4(A) &= \operatorname{Spur}(2A \cdot E_3 - E_1 \cdot A). \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass die Linearformen $\beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta^4$ eine Basis $\mathcal{C} = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta^4\}$ des Dualvektorraums V^* bilden.

(b) Finde die Basis $\mathcal{B}$ von V, deren Dualbasis gleich $\mathcal{C}$ ist.

(c) Bestimme die Koordinaten der Linearform $\operatorname{Spur} : V \to \mathbb{R}$ bezüglich $\mathcal{C}$.

(d) Bestimme die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*$ der Bilinearform

$$\begin{aligned} \gamma &: V \times V \to \mathbb{R} \\ \gamma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) &= ab' - ca' + dd'. \end{aligned}$$

5. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der Vektorraum der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 3$ und $\varphi : V \to V$ die lineare Abbildung, die durch

$$\varphi(f) = f(x-1) - xf'(x).$$

definiert ist. Gegeben sind die Basen $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\}$ und $\mathcal{B} = \{-x+1, 2x+1, x^3 - x^2, x^3 + 1\}$ von V.

(a) Bestimme die Matrixdarstellung $\operatorname{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{E})$.

(b) Schreibe die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$.

(c) Bestimme die Eigenwerte von φ.

6. Sei V ein Vektorraum der Dimension n mit den zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ und sei $L = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$. Sei weiter wie üblich $\Lambda = L^{-1}_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = L^{-1}$.

(a) Bescreibe in der Einsteinschen Summenkonvention das Transformationsverhalten eines Tensor T

i. vom Typ $(0,1)$ mit Koordinaten T^i bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{T}^i$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

ii. vom Typ $(2,0)$ mit Koordinaten T^i bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{T}^i$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

iii. vom Typ $(1,3)$ mit Koordinaten T^i bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{T}^i$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

(b) Welche der folgenden indizierten Grössen U, X, Y, Z besitzen das Transformationsverhalten eines Tensors in der Einsteinschen Summenkonvention? Wenn die Antwort ja ist, bestimme den Typ des Tensors. Begründe alle deine Antworte.

v. $\tilde{U}_{ij} = L_i^k L_j^\ell U_{k\ell}$

vi. $\tilde{X}^{ijk} = L_q^i L_r^j \Lambda_s^k X^{qrs}$

vii. $\Lambda_i^k \tilde{Y}^{ij} = \Lambda_r^j Y^{kr}$

viii. $\tilde{Z}_j^i = \Lambda_k^i L_j^\ell L_q^p \Lambda_\ell^q Z_p^k$

7. Gegeben sind die zwei Basen von $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und das innere Produkt g auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$, für welches $\mathcal{C}$ orthonormal ist.

(a) Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{CB}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.

(b) Bestimme die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{B}$.

(c) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ bezüglich g.

(d) Bestimme die kovarianten und kontravarianten Koordinaten von A bezüglich $\mathcal{B}$.

8. Wir bezeichnen einen Spannungstensor σ_S als Scherungsdeformation (shear deformation), wenn dessen Spur gleich 0 ist. Ausserdem bezeichnen wir einen Spannungstensor σ_P als hydrostatischen Druck, falls dessen Hauptspannungen alle gleich sind.

Weiter sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$A = [\sigma]_{\mathcal{E}} = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimme die ersten drei Spannungsinvarianten I_1, I_2 und I_3 des obigen Spannungstensors σ.

(b) Bestimme die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von σ.

(c) Bestimme eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer σ durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

(d) Schreibe den obigen Spannungstensor σ als Summe einer Scherungsdeformation σ_S und eines hydrostatischen Drucks σ_P.

(e) Finde eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Matrixdarstellung von σ_S auf der Diagonale nur Nullen hat.