Serie 2

Basen, Basiswechsel, Einsteinsche Summenkonvention

1. Seien $A = (A^i_j) \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ und $B = (B^i_j) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Matrizen, wo der obere Index die Reihe und der untere die Spalte bezeichnet. Seien weiter $x = (x^i) \in \mathbb{R}^\ell$ und $y = (y^i) \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren. Schreibe die Koordinaten der folgenden Ausdrücke mittels der Einsteinschen Summenkonvention:

   (a) AB

   (b) By

   (c) $y^T B^T$

   (d) $A^T x$

   (e) $xy^T B^T$

2. Gegeben sind zwei $n \times n$ Matrizen $A = (A^i_j)$ und $B = (B^i_j)$. Sei $I = (\delta^i_j)$ die $n \times n$ Einheitsmatrix. Weiter sei $x = (x^i)$ ein n-dimensionellen Spaltenvektoren. Schreibe die folgenden Ausdrücke explizit aus.

   (a) $x^j A^i_k B^k_j$

   (b) $\delta^j_i \delta^k_j A^i_k$

   (c) $\delta^j_i A^i_k B^k_\ell x^\ell$

   (d) $\delta^i_i \delta^k_j \delta^j_k$

3. Sei $u = (u_i) \in \mathbb{R}^n$. Definieren wir die Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = u_i - u_j$. Zeige, dass $A_{ij} x^i x^j = 0$ gilt.

4. Welche der folgenden Ausdrücke machen Sinn? Warum?

   (a) $x^i y_i = t^i$

   (b) $A_{nm} E^{mn} = U$

   (c) $A^{ep} F_{e\ell} = T^p_{e\ell}$

   (d) $P^{fe} F_f E^r = S^e H^r$

   (e) $E^i_{ch} H_{oe} R^{ch} N^{en} = U^{ni} T_o$

5. Gegeben sind die reellen Matrizen

$$m_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad m_3 := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_4 := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \text{ und } B =: \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1000 \end{bmatrix}.$$

   (a) Zeige, dass $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2-Matrizen ist.

   (b) Finde $[B]_{\mathcal{M}}$.

   (c) Finde $[A]_{\mathcal{M}}$ und folgere daraus, dass $\{m_1, A, m_3, m_4\}$ keine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2-Matrizen ist.

6. Für jede folgende Untermenge vom Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 4$, bestimme ob sie ein Untervektorraum ist. Ist das der Fall, finde eine Basis dieses Untervektorraumes.

   (a) $U_1 := \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : f(1) = 1\}$

   (b) $U_2 := \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : f(1) = f(0) = f(-1) = 0\}$

   (c) $U_3 := \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : f(0) + f'(0) = 2f(1)\}$

Abgabetermin: 12.03.2019.