Serie 3

Lineare Transformationen und ihre Matrixdarstellung

1. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, mit
$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \; x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$
Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ die einzige lineare Abbildung, die $x_1 \mapsto x_2$ bzw. $x_2 \mapsto x_1$ bzw. $x_3 \mapsto x_3$ schickt.
   (a) Bestimme die Matrixdarstellung von φ bezüglich $\mathcal{B}$.
   (b) Bestimme die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.
   (c) Ist die bei (b) gefundene Matrix diagonalisierbar?

2. Gegeben sind die zwei Basen von $\mathbb{R}^{2\times 2}$
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
und
$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
sowie die zwei lineare Abbildungen
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} &\to \mathbb{R}^{2\times 2} & \tilde{\varphi} : \mathbb{R}^{2\times 2} &\to \mathbb{R}^{2\times 2} \\ A &\mapsto A - A^T & A &\mapsto A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A. \end{aligned}$$
   (a) Bestimme die Matrixdarstellungen von φ bezüglich $\mathcal{B}$ und von $\tilde{\varphi}$ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.
   (b) Berechne die Wechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$.
   (c) Finde die Matrixdarstellungen von φ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$ und von $\tilde{\varphi}$ bezüglich $\mathcal{B}$.

3. Gegeben sind die Ebene $\pi : x - y + z = 0$ und die Gerade $\ell : x = y = z$ im Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Ebenenspiegelung an π und $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Achsenspiegelung an ℓ.

(a) Finde eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von α besteht und bestimme die Matrixdarstellung $[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

(b) Finde die Matrixdarstellung von α bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(c) Finde die Matrixdarstellung von β bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(d*) Sei $\pi' = \beta(\pi)$ die an der Gerade ℓ reflektierte Ebene π. Bestimme eine Gleichung, die π' definiert.

4. Sei $\Theta : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ die lineare Transformation des Vektorraumes der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$, die definiert ist durch

$$\Theta(f(x)) = (3x - 1)f(x) - (x^2 - 2)f'(x).$$

Bestimme die Matrixdarstellung von Θ bezüglich der Standarbasis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ sowie bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}} = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}$.

Abgabetermin: 19.03.2019.