Serie 4

Lineare Transformationen, Linearformen

1. Gegeben ist die Gerade $\ell : x + y = y - 2z = 0$ im Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Sei $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion an ℓ. Finde die Matrixdarstellung von π bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

2. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, mit

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die $x_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x_2 \mapsto \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $x_3 \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ schickt. Weiter betrachten wir die Basis $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^2$.

   (a) Berechne die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

   (b) Berechne die Matrixdarstellung von ψ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.

   (c*) Finde alle lineare Abbildungen $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die $\theta \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ erfüllen.

   (d*) Finde eine lineare Abbildungen $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die $\psi \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ erfüllen.

3. Gegeben ist die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

von $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ (siehe Serie 3, Aufgabe 2). Seien weiter $\mathrm{tr}, \omega, \eta : V \to \mathbb{R}$ die Linearformen, die definiert sind durch

$$\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d,$$

$$\omega(A) = \mathrm{tr}\left(A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A\right),$$

$$\eta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a - b.$$

(a) Bestimme die Matrixdarstellung von tr bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Bestimme die Matrixdarstellungen von ω bezüglich $\mathcal{B}$.

(c) Bestimme die Matrixdarstellungen von η bezüglich $\mathcal{B}$.

(d*) Finde eine weitere Linearform $\theta : V \to \mathbb{R}$, so dass $\{\mathrm{tr}, \omega, \eta, \theta\}$ eine Basis des Dualvektorraums $(V)^*$ ist.

Abgabetermin: 26.03.2019.