

## Serie 5

### EIGENWERTE, LINEARFORMEN

1. Sei  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  der Vektorraum der reellen Matrizen, siehe Aufgabe 2 aus der Serie 3. Seien  $\varphi$  und  $\tilde{\varphi}$  die lineare Transformationen  $V \rightarrow V$ , die definiert sind durch

$$\varphi(A) = A - A^T, \quad \tilde{\varphi}(A) = A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A.$$

- (a) Finde Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\varphi$ .
  - (b) Ist  $\varphi$  diagonalisierbar? Wenn ja, bestimme eine Eigenbasis  $\mathcal{E}_\varphi$  und die Matrixdarstellung von  $\varphi$  bezüglich  $\mathcal{E}_\varphi$ .
  - (c) Finde die Eigenwerte von  $\tilde{\varphi}$ . Ist  $\tilde{\varphi}$  diagonalisierbar?
2. Sei  $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$  der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq 3$ . Sei  $\{e_0, \dots, e_3\}$  die Standardbasis von  $V$ , wobei  $e_i := x^i$ . Gegeben sind die folgenden Linearformen  $V \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \theta^0(f(x)) &:= f(0), & \theta^1(f(x)) &:= f'(0), \\ \theta^2(f(x)) &:= f''(0), & \theta^3(f(x)) &:= f'''(0). \end{aligned}$$

Weiter sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$  die Linearform definiert durch  $\alpha(f(x)) := f(a)$ .

- (a) Zeige, dass das folgende für  $I, J \in \{0, 1, 2, 3\}$  gilt:

$$\theta^I(e_J) = \begin{cases} I! & \text{wenn } I = J \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (b) Berechne die Ausdrücke  $\theta^i(e_j) \cdot \theta^j(e_i)$  und  $\theta^i(e_i) \cdot \theta^j(e_j)$ .
  - (c) Zeige, dass die Linearformen  $\theta^0, \dots, \theta^3 \in V^*$  eine Basis von  $V^*$  bilden.
  - (d) Finde  $\alpha_0, \dots, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ , die  $\alpha = \alpha_i \theta^i$  erfüllen, d.h., die Komponenten von  $\alpha$  bezüglich der Basis  $\{\theta^0, \dots, \theta^3\}$  von  $V^*$ .
3. Gegeben ist eine Nummer  $a \in \mathbb{R}$  und die Vektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Zeige, dass  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  bilden, wenn und nur wenn  $a \notin \{-1, 0\}$ .
- (b) Nehmen wir an, dass  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ . Sei  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die lineare Transformation, die  $v_1 \mapsto v_2$  bzw.  $v_2 \mapsto v_1$  bzw.  $v_3 \mapsto e_1 + (a + 2)e_2 + e_3$  schickt. Für welche Werte von  $a$  ist  $\psi$  diagonalisierbar?

**Abgabetermin:** 02.04.2019.