Serie 6

Linearformen, der Dualvektorraum

1. Sei V ein Vektorraum. Zeige, dass der Dualraum

$$V^* := \{\text{alle Linearformen } \alpha : V \to \mathbb{R}\}$$

von V ebenfalls ein Vektorraum ist.

2. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$. Sei $\{e_0, \ldots, e_3\}$ die Standardbasis von V, wobei $e_i := x^i$. Gegeben sind auch die folgenden Linearformen $V \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \eta^0(f(x)) &:= f(0), \qquad & \eta^1(f(x)) &:= f(1), \\ \eta^2(f(x)) &:= f(2), \qquad & \eta^3(f(x)) &:= f(3). \end{aligned}$$

(a) Erkläre, warum die bei Aufgabe 2 der Serie 5 definierte Basis $\mathcal{T} := \{\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ von V^* nicht die Dualbasis von $\{e_0, \ldots, e_3\}$ ist und finde eine Basis $\tilde{\mathcal{E}}$ von V dessen Dualbasis $\mathcal{T}$ ist.

(b) Zeige, dass $\mathcal{C} = \{\eta^0, \ldots, \eta^3\}$ eine Basis von V^* ist.

(c) Bestimme welche Basis $\mathcal{B}$ von V die Eigenschaft $\mathcal{B}^* = \mathcal{C}$ erfüllt.

3. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$. Sei $\mathcal{E} = \{e_0, \ldots, e_3\}$ die Standardbasis von V, wobei $e_i := x^i$. Sei weiter $\omega \in V^*$ die Linearform, welche durch

$$\begin{aligned} \omega : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &\mapsto \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{0}^{2} (x-1)f'(x)dx \end{aligned}$$

definiert ist. Bestimme die Koordinatenvektoren $[\omega]_{\mathcal{E}^*}$ und $[\omega]_{\mathcal{C}}$, wo $\mathcal{C}$ ist die bei Aufgabe 2 definierte Basis.

4. Gegeben sind die drei Vektoren

$$b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \; b_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \; b_3 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigt, dass $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von V definiert.

(b) Sei $\mathcal{B}^* := \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ die Dualbasis von $\mathcal{B}$. Berechne $\beta^i(v^j e_j)$ für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ und $v^j \in \mathbb{R}$. Hier ist $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(c) Finde die Koordinatenvektoren $[\beta^i]_{\mathcal{E}^*}$ für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$.

(d) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Linearformen, welche durch

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}\right) = x^1 + ax^3 \text{ und } \gamma\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}\right) = (a-1)x^2 + x^3$$

definiert sind. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist $\{\alpha, \beta^2, \gamma\}$ eine Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$?

Abgabetermin: 09.04.2019.