

## Serie 7

### BILINEARFORMEN

1. Sei  $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) := \{\text{alle Bilinearformen } V \times V \rightarrow \mathbb{R}\}$ . Zeige, dass  $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$  ein Vektorraum ist.

*Hinweis:* Zeige, dass  $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$  ein Untervektorraum vom Vektorraum aller Abbildungen  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ist.

2. Gegeben ist einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$ , eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  und zwei Linearformen  $\eta, \theta \in V^*$  mit Koordinatenvektoren

$$[\eta]_{\mathcal{B}^*} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_n] \text{ und } [\theta]_{\mathcal{B}^*} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n].$$

Sei  $B = \eta \otimes \theta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Bestimme die Matrixdarstellung von  $B$  bezüglich  $\mathcal{B}$  und zeige, dass diese Matrix  $\text{Rang} \leq 1$  hat.

3. Gegeben ist der Vektorraum  $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$  der reellen Polynomen vom Grad  $\leq 3$ , seine Standardbasis  $\mathcal{E}$  und die Basis  $\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ . Wir betrachten die Abbildung:

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ (f(x), g(x)) \mapsto \int_{-2}^0 f'(x)g(x+1)dx$$

- (a) Zeige, dass  $B$  eine bilineare Abbildung auf  $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$  ist.  
(b) Bestimme die Matrixdarstellung von  $B$  bezüglich der Basis  $\mathcal{E}$ .  
(c) Bestimme die Matrixdarstellung von  $B$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$ .  
(d) Berechne  $B((x-1)^3, x^2 - 2x)$ .  
(e) Gibt es Linearformen  $\eta, \theta \in V^*$ , die die Gleichung  $B = \eta \otimes \theta$  erfüllen?
4. Gegeben sind die zwei Basen von  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

und

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sei weiter  $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung, die  $(A, B) \mapsto \text{Spur}(A^T B)$  schickt. Berechne die Matrixdarstellung von  $T$  bezüglich  $\mathcal{E}$  und die Matrixdarstellung von  $T$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

**Abgabetermin:** 16.04.2019.