

Serie 9

INNERE PRODUKTE, REZIPROKE BASEN

1. Sei V ein Vektorraum von der Dimension n . Gegeben sind zwei Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}$ von V und ein inneres Produkt g auf V , für welches die Basis \mathcal{B} orthonormal ist.

- (a) Zeige, dass die Transformationsmatrix $L = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = (L_j^i)$ gegeben ist durch

$$L_j^i = g(\tilde{b}_j, b_i).$$

- (b) Nehmen wir an, dass die Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ auch orthonormal bezüglich g ist. Zeige, dass die Gleichungen $L^T L = \text{Id} = L L^T$ gelten. Das bedeutet, dass L eine *orthogonale* Matrix ist. [*Hinweis:* Es hat $\delta_{i,j} = g(\tilde{b}_j, \tilde{b}_i)$. Schreibe den zweiten Vektor als Linearkombination von b_1, \dots, b_n .]

2. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\geq 3}$ der Vektorraum der reellen Polynomen vom Grad ≤ 3 . Gegeben sind die Basen

$$\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\}, \mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}, \mathcal{F} = \{x^3, x^2, x, 1\}$$

und das innere Produkt g auf V für welches die Basis \mathcal{B} orthonormal ist.

- (a) Finde die Matrixdarstellung von g bezüglich der Basis \mathcal{E} .
- (b) Wende das Gram-Schmidt Verfahren auf der Basis \mathcal{F} an, um eine (weitere) orthonormale Basis \mathcal{C} bezüglich g und finden.
- (c) Bestimme die Transformationsmatrix $L = L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ von \mathcal{B} nach \mathcal{C} . Überprüfe, dass L orthogonal ist. [*Hinweis:* Du kannst die folgende Tatsache verwenden, ohne sie zu beweisen: Eine Matrix ist orthogonal, wenn und nur wenn ihre Spalten bezüglich des Standardprodukts eine orthonormale Basis bilden.]

3. Gegeben sind die drei Vektoren

$$b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, b_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (a) Zeige, dass $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von \mathbb{R}^3 ist. Sei g das innere Produkt, bezüglich dessen \mathcal{B} orthonormal ist.
- (b) Bestimme die Matrixdarstellung von g bezüglich der Standardbasis \mathcal{E} von \mathbb{R}^3 .

- (c) Bestimme die reziproke Basis \mathcal{B}^g von \mathcal{B} bezüglich g .
- (d) Bestimme die reziproke Basis \mathcal{E}^g der Standardbasis \mathcal{E} bezüglich g .
- (e) Gibt es eine Basis $\mathcal{C}^g = \{c_1, c_2, c_3\}$ von \mathbb{R}^3 , dessen reziproke Basis bezüglich g durch $\mathcal{C} = \{c_3, c_2, c_1\}$ gegeben ist?

Abgabetermin: 07.05.2019.