ETH Zürich, D-MATL
**Multilineare Algebra**
**Lösung der Prüfung**
Sommer 2010
Prof. Ö. Imamoglu

**1.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Also:

$$\Lambda = L^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Also:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Es gilt $x' = \Lambda x$ und $x'' = U^{-1}x'$. Entsprechend erhält man folgende Tabelle:

| $x^1$ | $x^2$ | $x^3$ | $x'^1$ | $x'^2$ | $x'^3$ | $x''^1$ | $x''^2$ | $x''^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $-3$ | 1 | 1 | $-3$ | 11 | 4 |
| 5 | 1 | $-1$ | 5 | 1 | $-1$ | 1 | $-3$ | 0 |
| 5 | 1 | $-4$ | $-1$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |

**Bitte wenden!**

**2.** **a)**

$$[q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**b)**

$$[q]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \Lambda_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \big([1]_{\mathcal{B}}\ [1+x]_{\mathcal{B}}\ [1+x+x^2]_{\mathcal{B}}\ [1+x+x^2+x^3]_{\mathcal{B}}\big) \quad = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = L^{-1} = \Lambda_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'} = \Lambda[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}L$$

In Einstein-Summenkonvention:

$$F_j^{i\prime} = \Lambda_m^i L_j^n F_n^m$$

Es handelt sich also um einen Tensor vom Typ $(1,1)$. Ausrechnen ergibt:

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'} = \Lambda[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**c)** Siehe oben...

**d)** Aus Teilaufgabe $a)$ folgt (da $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$ Diagonalgestalt hat), dass $\mathcal{F}$ die Eigenwerte $12$, $6$, $4$ und $3$ hat mit zugehörigen Eigenvektoren $1$, $x$, $x^2$, $x^3$.

**3.** **a)**

$$A^i_j x^j \qquad \frac{\partial}{\partial x^k} A^i_j x^j = A^i_k \qquad A^i_j A^j_k A^k_m A^m_n \qquad \varepsilon^k_{ij} x^i y^j \qquad \delta_{ij} x^i y^j$$

**b)**

$$\begin{aligned}
&\text{Typ } (0,2): && T_{ij}{}' = L^m_i L^n_j T_{mn} \\
&\text{Typ } (2,1): && T^{ij\prime}_k = \Lambda^i_q \Lambda^j_r L^s_k T^{qr}_s \\
&\text{Typ } (3,2): && T^{abc\prime}_{ij} = \Lambda^a_{a'} \Lambda^b_{b'} \Lambda^c_{c'} L^m_i L^n_j T^{a'b'c'}_{mn}
\end{aligned}$$

**c)**

$$\Lambda^k_s T^{ij\prime}_k = \Lambda^i_q \Lambda^j_r T^{qr}_s$$

Multipliziert man beide Seiten mit $L^s_m$ erhält man:

$$T^{ij\prime}_m = \delta^k_m T^{ij\prime}_k = \Lambda^i_q \Lambda^j_r L^s_m T^{qr}_s$$

Es handelt sich dabei also um einen Tensor vom Typ $(2,1)$ (siehe auch Teilaufgabe $b$)).

**4.** **a)** Sei $B'$ die Matrix bestehend aus den Spaltenvektoren der Basis $\mathcal{B}'$, das heisst $B' = L$ (aus Aufgabe 1). Es gilt:

$$\begin{aligned}
[g]_{\mathcal{B}} &= A \\
[g]_{\mathcal{B}'} &= B'^T A B' = L^T A L = L^T [g]_{\mathcal{B}} L \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 17 & 7 \\ 7 & 7 & 17 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

In Einstein-Summenkonvention bedeutet dies:

$$g'_{ij} = L^m_i L^n_j g_{mn}$$

Es handelt sich also um einen Tensor vom Typ $(0,2)$.

**b)** Es gilt $b^i = g^{ij} b_j$, wobei $g^{ij}$ die zu $g_{ij}$ inverse Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix ist also $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Somit gilt:

$$b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Bitte wenden!**

**c)** $\vec{x} = [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und es gilt:

$$x_i = g_{ij} x^j \qquad\qquad x^{i'} = \Lambda^i_j x^j$$

Also:

$$[x]^{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[x]_{\mathcal{B}'} = \Lambda [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$