ETH Zürich, D-MATL
Multilineare Algebra
Lösung der Prüfung
Sommer 2011

Prof. Ö. Imamoglu

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen. Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Begründe jeweils deine Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

—- • —-

1. **a)** In der Standardbasis gilt:

$$(\mathcal{F}(x))^k = \sum_{m=1}^{N} A^k_m x^m = A^k_m x^m, \text{ wobei } A^k_m = \cos\left((k-1)(m-1)\frac{\pi}{N-1}\right)$$

Das heisst (in der Standardbasis):

$$\mathcal{F}(x) = Ax, \text{ wobei } A \text{ die Matrix mit Einträgen } A^k_m \text{ ist}$$

D.h. $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung (sie ist durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation gegeben) und A ist gerade deren Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis. Für $N = 3$ gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(0\cdot 0\cdot \pi/2) & \cos(0\cdot 1\cdot \pi/2) & \cos(0\cdot 2\cdot \pi/2) \\ \cos(1\cdot 0\cdot \pi/2) & \cos(1\cdot 1\cdot \pi/2) & \cos(1\cdot 2\cdot \pi/2) \\ \cos(2\cdot 0\cdot \pi/2) & \cos(2\cdot 1\cdot \pi/2) & \cos(2\cdot 2\cdot \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{F}$ ist invertierbar, da z.B. 0 kein Eigenwert ist (siehe unten). Es gilt: $\mathcal{F}(v) = Av = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v.$

D.h. v ist ein Eigenvektor von $\mathcal{F}$.

b)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{A}^i_j &= \Lambda^i_a L^b_j A^a_b = \Lambda^i_a L^b_j L^a_b = \delta^i_b L^b_j = L^i_j = A^i_j \\ \tilde{v} &= \Lambda v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist handelt es sich um einen $(1,1)$-Tensor, wie man auch aus der Transformationseigenschaft ablesen kann.

c) Siehe oben.

d) Wir wissen aus $a)$ bereits, dass 2 ein Eigenwert ist. *Allgemein gilt:*

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{id}) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 4 = -(\lambda-2)(\lambda^2-2) = -(\lambda-2)(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})$$

Also $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2/3} = \pm\sqrt{2}$.

2. a)

$$\begin{array}{llllllll}(1) & \tilde{G}^i_j = \sum_{k,l=1}^{n} \Lambda^i_k L^l_j G^k_l & \times & & (2) & L^m_i \tilde{H}^i_j & = L^l_j H^m_l & \checkmark \\ (3) & \tilde{G}^a_b = L^e_a L^f_b G^e_f & \times & & (4) & \tilde{H}^a_b & = \sum_{e,f=1}^{n} L^e_a L^f_b H^e_f & \times \\ (5) & \tilde{G}^i_j = \sum_{k,l=1}^{n} L^k_i L^l_j G^k_l & \checkmark & & (6) & \tilde{G}^i_j & = L^r_s \delta^{is} \delta_{kr} L^l_j G^k_l & \checkmark\end{array}$$

b)

$$\begin{aligned}(B^\top A)^i_j &= B^l_m A^k_j \delta_{lk} \delta^{mi} \\ \mathrm{tr}(B) &= B^i_j \delta^j_i \\ g(x,y) &= A_{ik} x^i y^k \\ (\mathcal{F}(x))^i &= B^i_j x^j \\ g(\mathcal{F}(x), x) &= A_{ik} (\mathcal{F}(x))^i x^k = A_{ik} B^i_j x^j x^k\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\tilde{T}^i_j &= \Lambda^i_a L^b_j T^a_b \\ \tilde{T}_{ijkl} &= L^a_i L^b_j L^c_k L^d_l T_{abcd} \\ \tilde{T}^{ijk}_l &= \Lambda^i_a \Lambda^j_b \Lambda^k_c L^d_l T^{abc}_d \\ \tilde{T}^{ij}_{klm} &= \Lambda^i_a \Lambda^j_b L^c_k L^d_l L^e_m T^{ab}_{cde}\end{aligned}$$

d)

$$\tilde{Q}_{ijkl} = L^b_j L^c_k L^d_l Q_{ibcd} \qquad \checkmark$$

i ist ein freier Parameter, Typ: $(0,3)$

$$\tilde{R}^i_{jk} = \delta^a_d \Lambda^i_a L^b_j L^c_k R^d_{bc} \qquad \checkmark$$

$\delta^a_d \Lambda^i_a = \Lambda^i_d$, Typ: $(1,2)$

$$S^{ij}_{kl} = \Lambda^i_a \Lambda^j_b L^a_k L^b_l \tilde{S}^{kl}_{ij} \qquad \times$$

k, l sind links frei und rechts gebunden...

$$\Lambda^j_e \Lambda^k_f \tilde{T}^i_{jk} = \Lambda^i_a T^a_{ef} \qquad \checkmark$$

Multiplikation mit $L^e_g L^f_h$ ergibt: $\tilde{T}^i_{gh} = \delta^j_g \delta^k_h \tilde{T}^i_{jk} = L^e_g L^f_h \delta^i_a T^a_{ef}$, Typ: $(1,2)$

3. a)

$$(g_{ij}) = (\mathrm{Tr}(b_i^\top b_j)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Es gilt $b^i = g^{ij} b_j$, also:

$$b^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b^4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt $A_i = g_{ij} A^j$. Der kovariante Koordinatenvektor von A ist also:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. a) Es gilt:

$$\mathcal{B}_E = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\tilde{b}_1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{b}_2,\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{b}_3 \right\}$$

$$\mathcal{B}_R = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{b}_1,\ -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\tilde{b}_3,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{b}_2 \right\}$$

Die i-te Spalte von L_E (resp. L_R) entspricht gerade dem Koordinatenvektor des i-ten Basisvektors von $\mathcal{B}_E$ (resp. $\mathcal{B}_R$) bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$. Es gilt also:

$$L_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Eine konkrete Berechnung der involvierten Einstein-Summen (alle anderen Einträge sind gleich Null) für $L = L_E$ ergibt:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{12} &= L_1^a L_2^b \tilde{T}_{ab} = L_1^1 L_2^2 \tilde{T}_{12} = -\tilde{T}_{12} = 0 \\ \tilde{T}_{21} &= L_2^a L_1^b \tilde{T}_{ab} = L_2^2 L_1^1 \tilde{T}_{21} = -\tilde{T}_{21} = 0 \\ \tilde{T}_{13} &= L_1^a L_3^b \tilde{T}_{ab} = L_1^1 L_3^3 \tilde{T}_{13} = -\tilde{T}_{13} = 0 \\ \tilde{T}_{31} &= L_3^a L_1^b \tilde{T}_{ab} = L_3^3 L_1^1 \tilde{T}_{31} = -\tilde{T}_{31} = 0 \end{aligned}$$

und für $L = L_R$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{23} &= L_2^a L_3^b \tilde{T}_{ab} = L_2^3 L_3^2 \tilde{T}_{32} = -\tilde{T}_{32} \\ \tilde{T}_{22} &= L_2^a L_2^b \tilde{T}_{ab} = L_2^3 L_2^3 \tilde{T}_{33} = \tilde{T}_{33} \end{aligned}$$

c) Die Transformationsmatrix Λ von $\tilde{\mathcal{B}}$ zur Standardbasis $\mathcal{B}$ entspricht gerade der inversen Matrix der Transformationsmatrix L von der Standardbasis $\mathcal{B}$ zur Basis $\tilde{\mathcal{B}}$. Letztere entspricht gerade der Matrix, deren Spaltenvektoren den Basisvektoren von $\tilde{\mathcal{B}}$ entsprechen. Also:

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \Lambda = L^{-1} = L^\top = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Wir verwenden die obigen Symmetrien zur Vervollständigung der Matrixeinträge von $\tilde{T}_{ij}$ und die Koordinaten T_{ij} bezüglich der Standardbasis erhält man durch die Transformationsvorschrift des $(0,2)$-Tensors T:

$$\tilde{T} = (\tilde{T}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{ij} = \Lambda_i^a \Lambda_j^b \tilde{T}_{ab}, \qquad \text{also}$$

$$T = (T_{ij}) = \Lambda^\top \tilde{T} \Lambda = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

d) Bei S resp. $\tilde{S}$ handelt es sich **nicht** um Koordinaten eines Tensors. Um die Koordinaten S bezüglich $\mathcal{B}$ aus den Koordinaten $\tilde{S}$ bezüzglich $\tilde{\mathcal{B}}$ zu berechnen benötigt man entsprechend entweder eine kompliziertere (nicht lineare!) Transformationsformel oder man ist gezwungen zuerst $\tilde{T}_{ij}$ aus $\tilde{S}$ zu berechnen, dann T_{ij} mittels dem (linearen) Transformationverhalten von T zu bestimmen und dann S aus T abzulesen. In diesem Falle ergibt dies:

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$