ETH Zürich, D-MATL

Multilineare Algebra Musterlösungen

Sommer 2012

Dr. Ana Cannas

1. **a)** Es gilt $A^i_j = \varphi(b_i)^j$, wobei $\varphi(b_1) = 1 + 6x^2$, $\varphi(b_2) = 3x^2$, $\varphi(b_3) = 2x^2$. Also:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Es gilt $c_{ij} = \alpha(b_i)\beta(b_j)$. Also:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\varphi \in L(V, V) \approx V \otimes V^*$ ist ein $(1, 1)$-Tensor und $\alpha \otimes \beta \in V^* \otimes V^*$ ist ein $(0, 2)$-Tensor. Entsprechend gilt:

$$\tilde{A}^i_j = \Lambda^i_a L^b_j A^a_b$$
$$\tilde{c}_{ij} = L^a_i L^b_j c_{ab}$$

d)

$$\operatorname{tr}\left(\tilde{A}^i_j\right) = \underbrace{\operatorname{tr}(\Lambda^i_a A^a_b L^b_j)}_{=\operatorname{tr}(\Lambda A L)} = \Lambda^i_a A^a_b L^b_i = L^b_i \Lambda^i_a A^a_b = \delta^b_a A^a_b = A^a_a = \operatorname{tr}(A^i_j), \quad \text{(OK)}$$

e)

$$\operatorname{tr}((\tilde{c}_{ij}) = \operatorname{tr}(L^a_i L^b_j c_{ab}) = c_{ab} L^b_i L^a_i = c_{ab} \underbrace{\left(L L^\top\right)^b_a}_{\neq \delta^b_a} \neq c_{ab}\delta^b_a = \operatorname{tr}(c_{ij})$$

Ein Gegenbeispiel ist z.B. $L = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\operatorname{tr}(\tilde{c}_{ij}) = \operatorname{tr}(4c_{ij}) = 4\operatorname{tr}(c_{ij}) = 4 \neq 1 = \operatorname{tr}(c_{ij})$$

f) Die Eigenwerte sind $1, 0, 2$. Eine Eigenbasis ist z.B. $\tilde{\mathcal{B}} = \left\{\tilde{b}_1 = 1 - 6x^2,\ \tilde{B}_2 = 2x - 3x^2,\ \tilde{B}_3 = x^2\right\}$.

2. **a)** Da $\mathcal{B}$ die Standardbasis ist, ist L ist die Matrix bestehend aus den Spaltenvektoren der neuen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Sei $B^i_j = (b_j)^i$, dann gilt:

$$(\tilde{g}_{ij}) = g(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j) = B^\top (g_{ij}) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $\tilde{g}_{ij} = L^a_i L^b_j g_{ab}$. $\mathcal{B}$ ist keine Orthonormalbasis, da $g_{ij} \neq \delta_{ij}$. $\tilde{\mathcal{B}}$ ist eine Orthonormalbasis, da $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$.

d) Es gilt $b^i = g^{ij} b_j$ mit

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also:

$$b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da $\tilde{\mathcal{B}}$ eine Orthonormalbasis ist gilt $\tilde{b}^i = \tilde{g}^{ij} \tilde{b}_j = \delta^{ij} \tilde{b}_j$. Die reziproke Basis von $\tilde{\mathcal{B}}$ entspricht also der ursprünglichen Basis.

e) Es gilt $v_i = g_{ij} v^j$, also:

$$(v_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

f) Es gilt $\tilde{v}^i = \Lambda^i_j v^j$, also:

$$(\tilde{v}^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. **a)** Die Hauptkoeffizienten sind $-1,\ 1,\ 2$.

b)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Es gilt:

$$\left(\varepsilon_{ij}^K\right) = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\varepsilon_{ij}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\varepsilon_{ij}^S\right) = (\varepsilon_{ij}) - \left(\varepsilon_{ij}^K\right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

d) Es gilt:

$$\left(E^{ij11}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \left(E^{ijkl}\right) = \left(E^{ij11}\right) + (k + l - 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entsprechend gilt:

$$\left(\sigma^{ij}\right) = \left(E^{ijkl}\sigma_{kl}\right) = \begin{pmatrix} (1+1+2\cdot 4) & (2+2+2\cdot 5) & (3+3+2\cdot 6) \\ (2+2+2\cdot 5) & (3+3+2\cdot 6) & (4+4+2\cdot 7) \\ (3+3+2\cdot 6) & (4+4+2\cdot 7) & (5+5+2\cdot 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 18 \\ 14 & 18 & 22 \\ 18 & 22 & 26 \end{pmatrix}$$

4. **a)** Ein allgemeiner Tensor T_{ijkl} mit $i,j,k,l = 1,2$ besitzt $2^4 = 16$ Einträge. Da $T_{ijkl} = T_{\pi(ijkl)}$ für eine beliebige Permutation gilt, folgt, dass die Angabe eines Eintrages T_{ijkl} alle anderen Einträge mit der gleichen Anzahl an 1'en bereits bestimmt (er ist nämlich gleich). Es bleiben 5 unabhängige Koordinaten übrig:

$$T_{1111},\ T_{1112},\ T_{1122},\ T_{1222},\ T_{2222}$$

Es handelt sich bei T_{ijkl} um einen Tensor vom Typ $(0,4)$, also $T \in V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*$. Unter Basiswechsel verhält sich T wie folgt:

$$\tilde{T}_{ijkl} = L_i^a L_j^b L_k^c L_l^d T_{abcd}$$

b)

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da die Materialeigenschaft unter dem durch M beschriebenen Basiswechsel invariant bleibt folgt $T_{ijkl} = M_i^a M_j^b M_k^c M_l^d T_{abcd}$. Es gilt also:

$$\begin{aligned} T_{1222} &= M_1^a M_2^b M_2^c M_2^d T_{abcd} = M_1^1 M_2^2 M_2^2 M_2^2 T_{1222} = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot T_{1222} = -T_{1222} = 0 \\ T_{1112} &= M_1^a M_1^b M_1^c M_2^d T_{abcd} = M_1^1 M_1^1 M_1^1 M_2^2 T_{1222} = -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot 1 \cdot T_{1112} = -T_{1112} = 0 \end{aligned}$$

c) Wir haben $T(e_i, e_j, e_k, e_l) = T_{ijkl}$. Da T multilinear ist, wegen der Symmetrie und wegen dem obigen Resultat folgt entsprechend:

$$\begin{aligned} T(e_1, e_2, e_1 + e_2, 7e_1 - e_2) &= 7T(e_1, e_2, e_1, e_1) + 7T(e_1, e_2, e_2, e_1) - T(e_1, e_2, e_1, e_2) - T(e_1, e_2, e_2, e_2) \\ &= 7T_{1211} + 7T_{1221} - T_{1212} - T_{1222} = 6T_{1122} = 30 \end{aligned}$$

d) Es gilt:

$$U^{ij} = U(\beta^i, \beta^j) = T(e_1, e_2, \beta^i(e_1)e_1, \beta^j(e_2)e_2) = \beta^i(e_1)\beta^j(e_2)T_{1212} = \delta_1^i \delta_2^j T_{1122} = 5\delta_1^i \delta_2^j, \quad \text{resp.}$$

$$\left(U^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$