ETH Zürich, D-MATL
Multilineare Algebra Musterlösungen
Sommer 2013

Dr. A. Ramadoss

1. a) $\tilde{\beta}^i(b_j) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $\det(\tilde{\beta}^i(b_j)) = 2 \neq 0$.

b)

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}^1 &= \beta^1 + \beta^2 + \beta^3 \\ \tilde{\beta}^2 &= \beta^1 + 2\beta^2 + 3\beta^3 \\ \tilde{\beta}^3 &= \beta^1 + 4\beta^2 + 9\beta^3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{aligned} \beta^1 &= 3\tilde{\beta}^1 - \frac{5}{2}\tilde{\beta}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\beta}^3 \\ \beta^2 &= -3\tilde{\beta}^1 + 4\tilde{\beta}^2 - \tilde{\beta}^3 \\ \beta^3 &= \tilde{\beta}^1 - \frac{3}{2}\tilde{\beta}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\beta}^3, \end{aligned}$$

deshalb

$$[\beta^1]_{\tilde{\mathcal{B}}^*} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad [\beta^2]_{\tilde{\mathcal{B}}^*} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [\beta^3]_{\tilde{\mathcal{B}}^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{aligned} b_1 &= \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_3 \\ b_2 &= \tilde{b}_1 + 2\tilde{b}_2 + 4\tilde{b}_3 \\ b_3 &= \tilde{b}_1 + 3\tilde{b}_2 + 9\tilde{b}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Also

$$\tilde b_1 = 3b_1 - 3b_2 + b_3$$
$$\tilde b_2 = -\frac{5}{2}b_1 + 4b_2 - \frac{3}{2}b_3$$
$$\tilde b_3 = \frac{1}{2}b_1 - b_2 + \frac{1}{2}b_3,$$

deshalb

$$[\tilde b_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\tilde b_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 4 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad [\tilde b_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

und

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

d) $v = b_1 + b_2 + b_3 = (\tilde b_1 + \tilde b_2 + \tilde b_3) + (\tilde b_1 + 2\tilde b_2 + 4\tilde b_3) + (\tilde b_1 + 3\tilde b_2 + 9\tilde b_3) = 3\tilde b_1 + 6\tilde b_2 + 14\tilde b_3$
$\Rightarrow [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $[v]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$.

e) $\mathcal{F}(b_1) = b_1$, $\mathcal{F}(b_2) = 2b_2$, $\mathcal{F}(b_3) = 3b_3$, also

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$[\mathcal{F}]_{\tilde{\mathcal{B}}} = L^{-1}[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}.$$

f) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, und die Eigenvektoren sind $b_1 = e^t$, $b_2 = e^{2t}$, $b_3 = e^{3t}$.

2. a) Typ der Tensoren:

$u:\ (1,0)$-Tensor, $\quad \beta:\ (0,1)$-Tensor, $\quad g:\ (0,2)$-Tensor, $\quad h:\ (1,2)$-Tensor.

$g_{ij} = g(b_i, b_j) = \beta(h(b_i, b_j)) = \beta(h^k_{ij} b_k) = h^k_{ij}\beta(b_k) = h^k_{ij}\beta_k.$

b) $(0,2)$: $\tilde T_{ij} = L^a_i L^b_j T_{ab}$

$(4,0)$: $\tilde T^{ijkl} = \Lambda^i_a \Lambda^j_b \Lambda^k_c \Lambda^l_d T^{abcd}$

$(1,2)$: $\tilde T^i_{jk} = \Lambda^i_a L^b_j L^c_k T^a_{bc}$

$(2,2)$: $\tilde T^{ij}_{kl} = \Lambda^i_a \Lambda^j_b L^c_k L^d_l T^{ab}_{cd}$

c) Q ist ein $(3,0)$-Tensor.

R ist kein Tensor.

S: j ist ein freier Parameter, Typ: $(1,1)$.

$\delta^l_a L^a_j = L^l_j$, also $\tilde{T}^i_j = \delta^l_a \Lambda^i_k L^a_j T^k_l = \Lambda^i_k L^l_j T^k_l$. Also T ist ein $(1,1)$-Tensor.

d) $\dim \mathcal{R} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

$\dim \mathcal{S} = 4 \cdot 2 = 8$, weil eine zyklische Permutation von (i,j,k) in der Menge $\{(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,2)$, $(2,2,2)\}$ ist, und $l \in \{1,2\}$.

Jetzt sei $\{e_1, e_2\}$ die Standardbasis, $T^l_{ijk} = i + j + k - l$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $T\colon V \times V \times V \to V$ eine multilineare Abbildung, und $T(u,v,w) = T^l_{ijk} u^i v^j w^k e_l$. Also

$$\begin{aligned}(T(u,v,w))^1 &= (i+j+k-1)u^i v^j w^k \overset{w^2=0}{=} 2(i+j)u^i v^j = \\ &= 2\,(2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \cdot 1) = 6, \\ (T(u,v,w))^2 &= (i+j+k-2)u^i v^j w^k \overset{w^2=0}{=} 2(i+j-1)u^i v^j = \\ &= 2\,(1 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot 1) = 6.\end{aligned}$$

Deshalb $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3. a)

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $g_{ij} = G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$g'_{ij} = L^\top G L = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 5 \\ 10 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

c) $b^i = g^{ij} b_j$, wobei

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & -1 \\ \frac{6}{5} & \frac{7}{5} & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$b^1 = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$b^i \neq b_i \Rightarrow \mathcal{B}$ ist nicht eine Orthonormalbasis.

$b'^i = g'^{ij} b'_j$, wobei

$$g'^{ij} = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 5 \\ 10 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} & -4 & 1 \\ -4 & 7 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{5} & -4 & 1 \\ -4 & 7 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 2 & -1 \\ -\frac{8}{5} & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$b'^1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b'^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b'^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$b'^i \neq b'_i \Rightarrow \mathcal{B}'$ ist nicht eine Orthonormalbasis.

d) $v_i = g_{ij} v^j$, also $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

e) $v'^i = [v]_{\mathcal{B}'} = \Lambda [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$

4. a) $E = \frac{1}{2} I_{ij} \omega^i \omega^j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 74.$

b) Charakteristisches Polynom von $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 4 & 0 \\ 4 & \lambda - 7 & 4 \\ 0 & 4 & \lambda - 9 \end{pmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 7)(\lambda - 9) - 16(\lambda - 5) - 16(\lambda - 9) =$$

$$= \lambda^3 - 21\lambda^2 + 111\lambda - 91 = (\lambda - 1)(\lambda - 7)(\lambda - 13).$$

Eigenwerte: $1, 7, 13$. Also die Hauptträgheitsmomente sind $I_1 = 1$, $I_2 = 7$, $I_3 = 13$.

Eigenräume:

$$\ker(A-I)=\ker\begin{pmatrix}4&-4&0\\-4&6&-4\\0&-4&8\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}1&-1&0\\-2&3&-2\\0&-1&2\end{pmatrix}=$$
$$=\ker\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&-1&2\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},$$
$$\ker(A-7I)=\ker\begin{pmatrix}-2&-4&0\\-4&0&-4\\0&-4&2\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&1\\0&-2&1\end{pmatrix}=$$
$$=\ker\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-2&1\\0&-2&1\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix},$$
$$\ker(A-13I)=\ker\begin{pmatrix}-8&-4&0\\-4&-6&-4\\0&-4&-4\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}=$$
$$=\ker\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&2&2\\0&1&1\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Also die Hauptträgheitsachsen sind $\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

(Orthonormalbasis: $\tilde{e}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\tilde{e}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\tilde{e}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.)

c) Allgemeine Gleichung: $I_1x^2+I_2y^2+I_3z^2=1$. Also die Gleichung des Trägheitsellipsoids ist $x^2+7y^2+13z^2=1$.