Lösungen Prüfung

1. **a)** Per Definition von L_1, L_2 und L_3 gilt für $\mathcal{B}_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathcal{B}_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ und $\mathcal{B}_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$, dass

$$b_j = (L_1)^i_j a_i$$
$$c_k = (L_2)^i_k a_i$$
$$c_k = (L_3)^j_k b_j$$

und damit

$$c_k = (L_3)^j_k b_j = (L_3)^j_k (L_1)^i_j a_i = (L_2)^i_k a_i$$

oder equivalent,

$$L_1 L_3 = L_2$$

da das Produkt $(L_3)^j_k (L_1)^i_j = (L_1)^i_j (L_3)^j_k$ erst in der zweiten Form die übliche Matrizen Multiplikation darstellt,

also $L_3 = (L_1)^{-1} L_2$.

Für $(L_1)^{-1}$ rechnet man

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

und wir bekommen

$$(L_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

und schliesslich.

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \\ -11 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$

b)

$$[v]_{\mathcal{B}_2} = (L_1)^{-1}[v]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$[w]_{\mathcal{B}_2} = L_3[v]_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \\ -11 & -9 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) Dualbasen sind kontravariant. Also $\beta^j = \Lambda^j_i \alpha^i$, wobei $\Lambda = (L_1)^{-1}$. Damit

$$[\beta^1]_{\mathcal{B}_1^*} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$[\beta^2]_{\mathcal{B}_1^*} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$[\beta^3]_{\mathcal{B}_1^*} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Please turn over!

2. **a)** Zunächst beschreibt man V: Die Gleichung $A = A^*$ führt zu

$$a_{11} = \overline{a}_{11}; a_{22} = \overline{a}_{22} \Leftrightarrow a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$$

und

$$a_{12} = \overline{a}_{21}.$$

V ist also 4-dimensional, und zum Beispiel parametrisiert durch $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & d \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass die Elemente σ_1 und σ_4 den Unterraum $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ und σ_2 und σ_3 den Unterraum $\begin{pmatrix} 0 & b - ic \\ b + ic & 0 \end{pmatrix}$ aufspannen und damit insbesondere auch V erzeugen. Aus Dimensionsgründen ist $\{\sigma_i\}$ eine Basis.

b) Zunächst zeigen wir, dass g ein Skalarprodukt definiert. Seien $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \overline{b}_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \overline{a}_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ in V, dann $\mathrm{Spur}(B^*A) = \mathrm{Spur}(BA) = \mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(A^*B)$ Symmetrie von g zeigt, wobei die mittlelere Gleichung die Zykluseigenschaft der Spur nutzt (oder alternativ folgender Rechnung abgelesen werden kann). Weiter ist

$$\mathrm{Spur}(AB) = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{12}\overline{b_{12}} + \overline{a_{12}}b_{12}$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{12}\overline{b_{12}} + \overline{a_{12}\overline{b_{12}}} = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + 2\Re(a_{12}\overline{b_{12}})$$

in der Tat reellwertig. Ist $A = B$, dann $\mathrm{Spur}(AA) = a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2|a_{12}|^2 > 0$ ausser wenn $A = 0$. Wir haben gezeigt, dass g ein Skalarprodukt definiert.

Per definition ist $g_{ij} = g(\sigma_i, \sigma_j)$. Wir rechnen zunächst die Paare $\sigma_i\sigma_j$ aus.

$$\sigma_1\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_1\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \sigma_2\sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_3\sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und bekommen damit

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Wir haben $g_{ij} = 2\delta_{ij}$. Die zu $\mathcal{S}$ reziproke Basis $\mathcal{S}^g = \{\sigma^j\}$ erfüllt per Definition $g(\sigma^j, \sigma_i) = \delta_i^j$, so dass wir lediglich $\sigma^j = c\sigma_j$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$ wählen müssen, denn dann

$$g(\sigma^j, \sigma_i) = g(c\sigma_j, \sigma_i) = cg(\sigma_j, \sigma_i) = c2\delta_{ji}.$$

Für $c = \frac{1}{2}$ ist $\{\sigma^j = c\sigma_j\}$ also die zu $\mathcal{S}$ reziproke Basis.

See next page!

d) Wir sehen sofort, dass $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$ durch ψ invariant gelassen wird, und $\psi(\sigma_3) = -\sigma_3$. Damit ist die Matrisdarstellung von ψ,

$$[\psi]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Wir können sofort ablesen, dass σ_2 und σ_3 Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind. Wir können daher die Fragestellung auf den Unterraum gespannt durch σ_1 und σ_4 reduzieren, und betrachten das Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} v = \lambda v$$

. Wir lösen auf und bekommen für $v = (a, b)$

$$(3 - \lambda)a = b, \quad (3 - \lambda)b = a.$$

Dies gibt dir quadratische Gleichung $8 - 6\lambda + \lambda^2 = 0$ mit Lösungen $\lambda \in \{2, 4\}$. Damit gilt für $\lambda = 2$ die Gleichung $a = b$ und für $\lambda = 4$ gilt $a = -b$ und entsprechen damit den Vektoren $\sigma_1 + \sigma_4$ und $\sigma_1 - \sigma_4$. Zusammenfassend,

$$\mathcal{T} = \{\tau_i\} = \{\sigma_1 + \sigma_4, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1 - \sigma_4\}$$

und Spektrum $\{1, 2, 4\}$.

Der Basiswechsel von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{T}$ ist gegeben durch

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und daher bekommen wir für $\widetilde{g}_{ij}$, die Koordinaten von g bezüglich $\mathcal{T}$, dass

$$\widetilde{g}_{ij} = (L^T (g_{lk}) L)_{ij} = 2(L^T L)_{ij} = \begin{cases} 4\delta_{ij} & \text{falls } i \text{ oder } j \in \{1, 4\} \\ 2\delta_{ij} & \text{sonst.} \end{cases}$$

f) Da $\mathcal{S}^g = \frac{1}{2}\mathcal{S}$, $[\eta]_{\mathcal{S}^g} = 2(\sigma^2 + \sigma^4) = (0, 2, 0, 2)$. Aus *e)* ist $(\widetilde{g}_{ij})$ bekannt, und $[\eta]_{\mathcal{T}^g} = (\widetilde{g}_{ij})[\eta]_{\mathcal{T}}$ ist wegen $[\eta]_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_4) + \tau_2 = (\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2})^T$ also $[\eta]_{\mathcal{T}^g} = (2, 2, 0, 2)$.

3. a)

B	$(0, 2)$
f	$(1, 1)$
A	$(0, 2)$
g	$(0, 1)$
T	$(1, 3)$

Das Transformationsverhalten liest sich dann $\widetilde{B}_{ij} = L_i^k L_j^l B_{kl}$, $\widetilde{A}_{ij} = L_i^k L_j^l A_{kl}$, $\widetilde{g}_i = L_i^k g_k$, $\widetilde{f}_j^i = \Lambda_k^i L_j^l f_l^k$, $\widetilde{T}_{ijn}^m = L_i^k L_j^l L_n^r \Lambda_s^m T_{klr}^s$.

b) Für die Indizes $l = k$ haben wir jeweils $2 + 1 = 3$ Möglichkeiten für (i, j). Für eine fixe Wahl $k \neq l$ sind alle Tupel (i, j) erlaubt (also 4), wobei dann (für $n = 2$) die andere Wahl von $k \neq l$ eindeutig bestimmt ist. Also ist die Dimension von $\mathcal{W}$ gleich 10.

Please turn over!

4. **a)** Da $\operatorname{supp}(\varrho) = [0, l] \times \{0\} \times \{0\}$ ist

$$(I_{ij}) = \int_{\operatorname{supp}(\varrho)} \begin{pmatrix} x^2x^2 + x^3x^3 & -x^1x^2 & -x^1x^3 \\ -x^1x^2 & x^1x^1 + x^3x^3 & -x^2x^3 \\ -x^1x^3 & -x^2x^3 & x^1x^1 + x^2x^2 \end{pmatrix} \frac{m}{l} dx^1 dx^2 dx^3$$

$$= \int_0^l \begin{pmatrix} 0 & & \\ & x^1x^1 & \\ & & x^1x^1 \end{pmatrix} \frac{m}{l} dx^1 = \frac{1}{3} m l^2 \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

b) $L = I^i_j \omega^j e_i = \frac{1}{3} m l^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $E = \frac{1}{2} I_{ij} \omega^i \omega^j = \frac{1}{6} m l^2 128 = \frac{64}{3} m l^2$

d) I bereits Diagonal, also bilden die Standardbasis bereits ein Hauptträgheitsachsensystem. Die Eigenwerte sind 0 und und mit doppelter Vielfachheit $\frac{1}{3} m l^2$.

e) $\frac{1}{3} m l^2 (x^2)^2 + \frac{1}{3} m l^2 (x^3)^2 = 1$