Lösungen Prüfung Sommer 2017

1. (8 Punkte)
Die vier Basisvektoren der Basis $\mathcal{E} := \{1, x, x^2, x^3\}$ sind genau die Eigenvektoren der linearen Abbildung ψ, das heisst

$$\psi(1) = \lambda_1 \cdot 1, \;\; \psi(x) = \lambda_x x, \;\; \psi(x^2) = \lambda_{x^2} x^2, \;\; \psi(x^3) = \lambda_{x^3} x^3.$$

Für $\lambda_1 := \lambda_1$, $\lambda_2 := \lambda_x$, $\lambda_3 := \lambda_{x^2}$ und $\lambda_4 := \lambda_{x^3}$ gilt, dass

$$\begin{aligned}
\psi(1) &= 1 + x \cdot 0 + 1 = 2 = 2 \cdot 1 = \lambda_1 \cdot 1, \quad \text{(1 Punkt, falls der zugehörige Wert } \lambda_1 \text{ falsch ist.)}\\
\psi(x) &= x + x \cdot 1 + 0 = 2x = \lambda_2 x, \quad \text{(1 Punkt, falls der zugehörige Wert } \lambda_2 \text{ falsch ist.)}\\
\psi(x^2) &= x^2 + x \cdot 2x + 0 = 3x^2 = \lambda_3 x^2, \quad \text{(1 Punkt, falls der zugehörige Wert } \lambda_3 \text{ falsch ist.)}\\
\psi(x^3) &= x^3 + x \cdot 3x^2 + 0 = 4x^3 = \lambda_4 x^3. \quad \text{(1 Punkt, falls der zugehörige Wert } \lambda_4 \text{ falsch ist.)}
\end{aligned}$$

Damit hat die lineare Abbildung ψ die folgenden vier Eigenwerte, nämlich

$$\lambda_1 = 2, \;\; \lambda_2 = 2, \;\; \lambda_3 = 3, \;\; \lambda_4 = 4. \quad \text{(je 2 Punkte)}$$

2. (8 Punkte)
Es sei $\mathcal{B} := \{a_1(x) := 1, a_2(x) := 1 + x, a_3(x) := 1 + x + x^2, a_4(x) := 1 + x + x^2 + x^3\}$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(1) &= x \int_0^1 1 dt + x \cdot 1' = x\\
&= -a_1(x) + a_2(x) + 0a_3(x) + 0a_4(x), \quad \text{(1 Punkt)}\\
\mathcal{F}(1+x) &= x \int_0^1 (1+t) dt + x \cdot (1+x)' = x + \frac{1}{2}x + x = \frac{5}{2}x\\
&= -\frac{5}{2}a_1(x) + \frac{5}{2}a_2(x) + 0a_3(x) + 0a_4(x), \quad \text{(1 Punkt)}\\
\mathcal{F}(1+x+x^2) &= x \int_0^1 (1+t+t^2) dt + x(1+2x) = x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + x + 2x^2 = 2x^2 + \frac{17}{6}x\\
&= -\frac{17}{6}a_1(x) + \frac{5}{6}a_2(x) + 2a_3(x) + 0a_4(x), \quad \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(1+x+x^2+x^3) = x\int_0^1 (1+t+t^2+t^3)dt + x(1+2x+3x^2) = 3x^3+2x^2+\frac{37}{12}x$$
$$= -\frac{37}{12}a_1(x) + \frac{13}{12}a_2(x) - a_3(x) + 3a_4(x) \quad \text{(1 Punkt)},$$

Daher erhalten wir

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{17}{6} & -\frac{37}{12} \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad \text{(Jede Spalte ergibt 1 Punkt. (mit Folgefehler von oben))}$$

(Spaltenreihenfolge von unten nach oben verkehrt (oder analoge Fehler) $\Longrightarrow$ 2 Punkte.)

3. (10 Punkte)
Wir haben
a.) Wenn T ein Tensor vom Typ $(1,0)$ ist, gilt

$$\widetilde{T}^i = \Lambda^i_j T^j. \quad \text{(1 Punkt)}$$

b.) Wenn T ein Tensor vom Typ $(1,1)$ ist, gilt

$$\widetilde{T}^i_j = \Lambda^i_k L^l_j T^k_l. \quad \text{(1 Punkt)}$$

c.) Wenn T ein Tensor vom Typ $(0,2)$ ist, gilt

$$\widetilde{T}_{ij} = L^k_i L^l_j T_{kl}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

d.) Ja, dieser Ausdruck macht Sinn. Eine Summation auf der linken Seite über i und j. Da k auf der linken Seite nicht vorkommt ist B^k konstant für alle möglichen k. (1 Punkt)

e.) Ja, dieser Ausdruck macht Sinn. Links wird über j summiert mit i (kontravariant) und k (kovariant) als freieIndizes. Auf der rechten Seite sind i (kontravariant) und k (kovariant) ebenfalls freie Indizes. (1 Punkt)

f.) Ja, dieser Ausdruck macht Sinn. Keine Summation auf der linken Seite über i, j, k, das heisst alle Indizes i, j, k sind frei, aber der Tensor ist konstant gleich C. (1 Punkt)

g.) Ja, Q ist ein Tensor, da Q das Transformationsverhalten eines $(2,0)$-Tensors besitzt. (1 Punkt)

h.) Nein, R ist kein Tensor, da auf der linken Seite die Indizes i, j, k kovariant sind, aber dieselben Indizes i, j, k sich auf der rechten Seite kontravariant verhalten. (1 Punkt)

i.) Ja, S ist ein Tensor vom Typ $(2, 0)$, da gilt

$$\begin{aligned} L_i^q \widetilde{S}^{ij} = \Lambda_r^j S^{qr} &\iff \Lambda_q^l L_i^q \widetilde{S}^{ij} = \Lambda_q^l \Lambda_r^j S^{qr} \\ &\iff \left(\Lambda_q^l L_i^q\right) \widetilde{S}^{ij} = \Lambda_q^l \Lambda_r^j S^{qr} \\ &\iff \delta_i^l \widetilde{S}^{ij} = \Lambda_q^l \Lambda_r^j S^{qr} \\ &\iff \widetilde{S}^{lj} = \Lambda_q^l \Lambda_r^j S^{qr}. \end{aligned}$$

Dies ist so, da $\Lambda_j^k L_k^i = \Lambda_k^i L_j^k = \delta_j^i$ für alle i, j, k gilt. (1 Punkt)

j.) Nein, T ist kein Tensor, da gilt

$$\widetilde{T}_j^i = \Lambda_j^i L_k^j T_j^k = \delta_k^i T_j^k = T_j^i.$$

Wenn T ein $(1, 1)$-Tensor wäre, müsste gelten

$$\widetilde{T}_j^i = \Lambda_k^i L_j^l T_l^k. \quad \text{(1 Punkt)}$$

(Um die Punkte zu erhalten müssen die Antworten nicht exakt in der obigen ausführlichen Form gegeben sein.)

4. (8 Punkte)
Die kontravarianten Koordinaten von

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ sind

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{(Jeder Vektoreintrag ergibt 1 Punkt} \Longrightarrow \text{maximal 3 Punkte.)}$$

Es gilt die folgende Beziehung zwischen den kontravarianten Koordinaten und den kovarianten Koordinaten des Vektors v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, nämlich

$$[v]_{\mathcal{B}^g}^T = [g]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Es gilt

$$[v]^T_{\mathcal{B}^g} = [g]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}. \text{ (Jeder Vektoreintrag 1 Punkt} \Longrightarrow \text{maximal 3 Punkte.)}$$

Damit erhalten wir für die kovarianten Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}^g}$ von v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ das Resultat

$$[v]_{\mathcal{B}^g} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \text{ (1 Punkt, mit Folgefehler, runde Klammer ist nicht relevant)}$$

5. (8 Punkte)
Für das charakteristische Polynom $p_\varepsilon(\epsilon)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(\epsilon) &= \det\left(\varepsilon - \epsilon \mathbb{I}_3\right) \quad \text{(1 Punkt)} \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} 2-\epsilon & 1 & 0 \\ 1 & 2-\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2-\epsilon \end{bmatrix}\right) \\ &= (2-\epsilon)\det\left(\begin{bmatrix} 2-\epsilon & 1 \\ 1 & 2-\epsilon \end{bmatrix}\right) \\ &= (2-\epsilon)\left((2-\epsilon)^2 - 1\right) \\ &= (2-\epsilon)(\epsilon^2 - 4\epsilon + 3) \\ &= (2-\epsilon)(\epsilon-1)(\epsilon-3) \\ &= -(\epsilon-1)(\epsilon-2)(\epsilon-3). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die drei Hauptkoeffizienten $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ die folgenden Werte

$$\epsilon_1 = 1, \quad \epsilon_2 = 2, \quad \epsilon_3 = 3. \text{ (je 1 Punkt)}$$

Um die drei Hauptverzerrungsrichtungen $v_{\epsilon_1}, v_{\epsilon_2}, v_{\epsilon_3}$ zu berechnen, müssen wir die Gleichung

$$\varepsilon v_{\epsilon_i} = \epsilon_i v_{\epsilon_i} \iff \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1_{\epsilon_i} \\ v^2_{\epsilon_i} \\ v^3_{\epsilon_i} \end{bmatrix} = \epsilon_i \begin{bmatrix} v^1_{\epsilon_i} \\ v^2_{\epsilon_i} \\ v^3_{\epsilon_i} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2v^1_{\epsilon_i} + v^2_{\epsilon_i} \\ v^1_{\epsilon_i} + 2v^2_{\epsilon_i} \\ 2v^3_{\epsilon_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_i v^1_{\epsilon_i} \\ \epsilon_i v^2_{\epsilon_i} \\ \epsilon_i v^3_{\epsilon_i} \end{bmatrix} \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \text{ (1 Punkt)}$$

nach $v_{\epsilon_i} := \begin{bmatrix} v^1_{\epsilon_i} \\ v^2_{\epsilon_i} \\ v^3_{\epsilon_i} \end{bmatrix}$ auflösen.

Im Fall $i := 1$ mit $\epsilon_1 = 1$ erhalten wir die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 2v_{\epsilon_1}^1 + v_{\epsilon_1}^2 \\ v_{\epsilon_1}^1 + 2v_{\epsilon_1}^2 \\ 2v_{\epsilon_1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{\epsilon_1}^1 \\ v_{\epsilon_1}^2 \\ v_{\epsilon_1}^3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} v_{\epsilon_1}^1 + v_{\epsilon_1}^2 \\ v_{\epsilon_1}^1 + v_{\epsilon_1}^2 \\ v_{\epsilon_1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff v_{\epsilon_1} = \begin{bmatrix} v_{\epsilon_1}^1 \\ v_{\epsilon_1}^2 \\ v_{\epsilon_1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $i := 2$ mit $\epsilon_2 = 2$ erhalten wir die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 2v_{\epsilon_2}^1 + v_{\epsilon_2}^2 \\ v_{\epsilon_2}^1 + 2v_{\epsilon_2}^2 \\ 2v_{\epsilon_2}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_{\epsilon_2}^1 \\ 2v_{\epsilon_2}^2 \\ 2v_{\epsilon_2}^3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} v_{\epsilon_2}^2 \\ v_{\epsilon_2}^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff v_{\epsilon_2} = \begin{bmatrix} v_{\epsilon_2}^1 \\ v_{\epsilon_2}^2 \\ v_{\epsilon_2}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $i := 3$ mit $\epsilon_3 = 3$ erhalten wir die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 2v_{\epsilon_3}^1 + v_{\epsilon_3}^2 \\ v_{\epsilon_3}^1 + 2v_{\epsilon_3}^2 \\ 2v_{\epsilon_3}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_{\epsilon_3}^1 \\ 3v_{\epsilon_3}^2 \\ 3v_{\epsilon_3}^3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -v_{\epsilon_3}^1 + v_{\epsilon_3}^2 \\ v_{\epsilon_3}^1 - v_{\epsilon_3}^2 \\ -v_{\epsilon_3}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff v_{\epsilon_3} = \begin{bmatrix} v_{\epsilon_3}^1 \\ v_{\epsilon_3}^2 \\ v_{\epsilon_3}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Für die drei Hauptverzerrungsrichtungen $v_{\epsilon_1}, v_{\epsilon_2}, v_{\epsilon_3}$ erhalten wir somit

$$v_{\epsilon_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_{\epsilon_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_{\epsilon_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ (je 1 Punkt)}$$

Auch die folgenden Antworten sind ebenfalls korrekt

$$v_{\epsilon_1} = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \text{ für irgendein } x \in \mathbb{R}, \quad v_{\epsilon_1} = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$v_{\epsilon_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \text{ für irgendein } x \in \mathbb{R}, \quad v_{\epsilon_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$v_{\epsilon_3} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \text{ für irgendein } x \in \mathbb{R}, \quad v_{\epsilon_3} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

6. (8 Punkte)
Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
L_{\mathcal{B}\mathcal{A}} &= \mathcal{A}^{-1}\,\mathcal{B} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(Jede Matrix auf dieser Zeile ergibt 1/2 Punkt.)} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(5/2 Punkte für die erste Matrix dieser Zeile.)} \\
&= \begin{bmatrix} 8 & -7 & -19 \\ 4 & -1 & -6 \\ -7 & 5 & 15 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Daher erhalten wir als Resultat

$$
L_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 8 & -7 & -19 \\ 4 & -1 & -6 \\ -7 & 5 & 15 \end{bmatrix}. \qquad \left(\frac{\text{Anzahl korrekter Matrixeinträge (mit Folgefehler)}}{2}\ \text{Punkte}\right)
$$

7. (8 Punkte)
Es bezeichne $\mathcal{E} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und

$$
\mathcal{B} := \left\{ b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, b_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}.
$$

Sei weiter $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ die Transformationsmatrix von der Standardbasis $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$, gegeben durch

$$
L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} := \mathcal{E}^{-1}\,\mathcal{B} = \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \qquad \text{(Die korrekte Matrix ergibt 1 Punkt.)}
$$

Wir berechnen die folgende Determinante

$$
\begin{aligned}
\det(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\right) - 3\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\right) + 3\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= -6 + 15 + 6 = 15 \neq 0. \qquad \text{(1 Punkt für die Zahl 15.)}
\end{aligned}
$$

Da die obige Determinante zur Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ gehört und die Determinante ungleich Null ist, definiert $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ (1 Punkt), da gilt

$$\begin{aligned}
\det(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}) = 15 \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \text{ ist invertierbar} \\
&\Longrightarrow \quad L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \text{ hat Rang 3 } (L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \text{ hat vollen Rang}) \\
&\Longrightarrow \quad \text{Die drei Vektoren } b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ b_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } b_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \\
&\qquad\ \text{sind linear unabhängig} \\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\} \text{ ist eine Basis von } \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Wegen der Kontravarianz der Dualbasis müssen wir $\Lambda = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}$ berechnen. Es ist

$$\Lambda = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = L_{\mathcal{E}\,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix}. \quad \text{(Die korrekte Endmatrix ergibt 2 Punkte.)}$$

Die Koordinatenvektoren der Dualbasis $\mathcal{B}^* := \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ von $\mathcal{B}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^* := \{\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3\}$ von $(\mathbb{R}^3)^*$ können nun als Zeilen der Matrix $\Lambda = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}$ abgelesen werden, da gilt

$$\beta^i(v) = [v]^i_{\mathcal{B}} = \left(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}[v]_{\mathcal{E}}\right)^i \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \text{ und alle } v \in \mathbb{R}^3.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\beta^1 &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} = -\frac{2}{5}\epsilon^1 + \frac{3}{5}\epsilon^2 - \frac{4}{5}\epsilon^3, \quad \text{(1 Punkt mit Folgefehler von oben.)} \\
\beta^2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\epsilon^1 + \frac{1}{3}\epsilon^3, \quad \text{(1 Punkt mit Folgefehler von oben.)} \\
\beta^3 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix} = \frac{2}{15}\epsilon^1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 - \frac{1}{15}\epsilon^3. \quad \text{(1 Punkt mit Folgefehler von oben.)}
\end{aligned}$$

8. (8 Punkte)
Der Trägheitstensor I lässt sich genau gleich ausrechnen wie im Falle einer ebenen Platte mit dem Unterschied, dass hier $z \neq 0$ ist.
Der Trägheitstensor $I = [I_{ij}]$ ist gegeben durch die allgemeine Integralformel

$$I = [I_{ij}] := \int_K J(x, y, z)\,dm, \quad \text{(1 Punkt)}$$

wobei

$$J(x,y,z) := \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Da der Quader K mit Masse m homogen ist, gilt

$$\rho = \frac{\text{Masse des Quaders } K}{\text{Volumen des Quaders}} = \frac{m}{abc} \quad \text{(1 Punkt)}$$

und damit gilt

$$\int_K dm = \int_K \rho dxdydz = \frac{m}{abc}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz = \frac{m}{abc} abc = m.$$

Daher bekommen wir für den Trägheitstensor $I = [I_{ij}]$

$$I = \begin{bmatrix} \int_K (y^2+z^2)dm & -\int_K xydm & -\int_K xzdm \\ -\int_K xydm & \int_K (x^2+z^2)dm & -\int_K yzdm \\ -\int_K xzdm & -\int_K yzdm & \int_K (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}(y^2+z^2)\rho dzdydx & -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} xy\rho dzdydx & -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} xz\rho dzdydx \\ -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} xy\rho dzdydx & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}(x^2+z^2)\rho dzdydx & -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} yz\rho dzdydx \\ -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} xz\rho dzdydx & -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} yz\rho dzdydx & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}(x^2+y^2)\rho dzdydx \end{bmatrix}$$

$$= \frac{m}{abc}\begin{bmatrix} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}(y^2+z^2)dzdydx & -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} xydzdydx & -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} xzdzdydx \\ -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} xydzdydx & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}(x^2+z^2)dzdydx & -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} yzdzdydx \\ -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} xzdzdydx & -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} yzdzdydx & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}(x^2+y^2)dzdydx \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen

$$I_{11} = \frac{m}{abc}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}(y^2+z^2)dzdydx = \frac{m}{12}(b^2+c^2), \quad \text{(1 Punkt)}$$

$$I_{22} = \frac{m}{abc}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}(x^2+z^2)dzdydx = \frac{m}{12}(a^2+c^2) \quad \text{(1 Punkt)}$$

und

$$I_{33} = \frac{m}{abc}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}(x^2+y^2)dzdydx = \frac{m}{12}(a^2+b^2). \quad \text{(1 Punkt)}$$

Es gilt wie bei der Platte

$$I_{12} = I_{21} = -\frac{m}{abc} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} xydzdydx = 0,$$

$$I_{13} = I_{31} = -\frac{m}{abc} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} xzdzdydx = 0$$

und

$$I_{23} = I_{32} = -\frac{m}{abc} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} yzdzdydx = 0,$$

da die Integrale der Form $\int xdx, \int ydy, \int zdz$ gerade Stammfunktionen haben und damit über symmetrische Intervalle der Form $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right], \left[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right]$ verschwinden.

Wir erhalten daher als Resultat

$$I = [I_{ij}] = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

(1 Punkt für die drei korrekten Diagonaleinträge und 1 Punkt für alle 6 Nullen.)

Vollständig korrekte Endresultate ergeben immer die volle Punktzahl einer Aufgabe.

Gute Ideen in einer Aufgabe können zusätzliche Punkte ergeben. Die Punktzahl einer Aufgabe kann jedoch nie die Maximalpunktzahl der Aufgabe überschreiten.

Andere Lösungswege als in diesem Lösungsvorschlag ergeben die entsprechende Anzahl Punkte, gemessen am Erkenntnisfortschritt in einer Aufgabe.

Es gibt $\frac{1}{2}$-Punkte, wenn Ergebnisse nur teilweise korrekt sind (proportional zur erreichbaren Anzahl Punkte und dem korrekten Teil). Folgefehler werden nicht gezählt, ergeben also keinen Abzug.