Lösungen Prüfung Sommer 2018

1. (8 Punkte)
a.) Es gilt

$$\mathrm{spur}(\sigma) = \mathrm{spur}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\right) = 1+3+5 = 9. \text{ (2 Punkte)}$$

Daher muss gelten

$$\begin{aligned} \sigma_S &= \sigma - \frac{1}{3}\mathrm{spur}(\sigma)\mathbb{I}_3 \text{ (1 Punkt)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ (3 Punkte)} \end{aligned}$$

und

$$\sigma_P = \frac{1}{3}\mathrm{spur}(\sigma)\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (2 Punkte, je 1 Punkt).}$$

2. (8 Punkte)
Es sei $\mathcal{B} := \{a_1(x) := 1, a_2(x) := 1+2x, a_3(x) := 1+2x+3x^2, a_4(x) := 1+2x+3x^2+4x^3\}$.
Daher gilt

$$\begin{aligned} 1 &= a_1(x), \text{ (1/2 Punkt)} \\ x &= \frac{1}{2}(a_2(x) - a_1(x)), \text{ (1/2 Punkt)} \\ x^2 &= \frac{1}{3}(a_3(x) - a_2(x)), \text{ (1/2 Punkt)} \\ x^3 &= \frac{1}{4}(a_4(x) - a_3(x)). \text{ (1/2 Punkt)} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathcal{F}(1) = 1 + x^2 = a_1(x) - \frac{1}{3}a_2(x) + \frac{1}{3}a_3(x), \quad (1/2 \text{ Punkt})$$
$$\mathcal{F}(1+2x) = 1 + 4x + 2x^2 = -a_1(x) + \frac{4}{3}a_2(x) + \frac{2}{3}a_3(x), \quad (1/2 \text{ Punkt})$$
$$\mathcal{F}(1+2x+3x^2) = 1 + 4x + 12x^2 = -a_1(x) - 2a_2(x) + 4a_3(x), \quad (1/2 \text{ Punkt})$$
$$\mathcal{F}(1+2x+3x^2+4x^3) = 1 + 4x + 13x^2 + 16x^3 = -a_1(x) - \frac{7}{3}a_2(x) + \frac{1}{3}a_3(x) + 4a_4(x). \quad (1/2 \text{ Punkt})$$

Daher erhalten wir

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -2 & -\frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad (4 \text{ Punkte})$$

3. (10 Punkte)
Wir haben
a.) Wenn T ein Tensor vom Typ $(2,0)$ ist, gilt

$$\widetilde{T}^{ij} = \Lambda^i_k \Lambda^j_l T^{kl}. \quad (1 \text{ Punkt})$$

b.) Wenn T ein Tensor vom Typ $(1,1)$ ist, gilt

$$\widetilde{T}^i_j = \Lambda^i_k L^l_j T^k_l. \quad (1 \text{ Punkt})$$

c.) Wenn T ein Tensor vom Typ $(0,3)$ ist, gilt

$$\widetilde{T}_{ijk} = L^n_i L^l_j L^h_k T_{nlh}. \quad (1 \text{ Punkt})$$

d.) Ja, dieser Ausdruck macht Sinn. Eine Summation auf der linken Seite über i.
Da k auf der linken Seite nicht vorkommt ist B^k konstant für alle möglichen k. (1 Punkt)

e.) Nein, dieser Ausdruck macht keinen Sinn. Links wird über i summiert mit j (kontravariant) als freien Index und B ist ein Skalar ((0,0)-Tensor). Daher ist i auf der linken Seite kein freier Index. Auf der rechten Seite ist aber i (kontravariant) ein freier Index. (1 Punkt)

f.) Ja, dieser Ausdruck macht Sinn. Links wird über i und j summiert mit m (kontravariant) und k (kovariant) als freie Indizes. Auf der rechten Seite sind m (kontravariant) und k (kovariant) ebenfalls freie Indizes. Der Ausdruck $\delta_i^i = \sum_{i=1}^n = n \in \mathbb{N}_0$ gibt die Dimension eines Vektorraumes (Spur einer Identitätsmatrix) an. (1 Punkt)

g.) $\mathrm{spur}(ABC) = A_l^i B_k^l C_i^k$ (1 Punkt)

h.) $(A^3x)^j = A_l^j A_k^l A_i^k x^i$ (1 Punkt)

i.) $(A^2B)_i^j = A_l^j A_k^l B_i^k$ (1 Punkt)

j.) $(C^T x + y)^i = C_j^i x^j + y^i$ mit $C = [C_i^j]$ (1 Punkt)

(Um die Punkte zu erhalten müssen die Antworten nicht exakt in der obigen ausführlichen Form gegeben sein.)

4. (8 Punkte)
Die kontravarianten Koordinaten von

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ sind

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \text{(4 Punkte)}$$

Es gilt die folgende Beziehung zwischen den kontravarianten Koordinaten und den kovarianten Koordinaten des Vektors v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, nämlich

$$[v]_{\mathcal{B}^g}^T = [g]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Es gilt

$$[v]_{\mathcal{B}^g}^T = [g]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \text{(2 Punkte)}$$

Damit erhalten wir für die kovarianten Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}^g}$ von v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ das Resultat

$$[v]_{\mathcal{B}^g} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{(Die runde Klammer ist nicht relevant)} \quad \text{(1 Punkt)}$$

5. (8 Punkte)
Für das charakteristische Polynom $p_\varepsilon(\epsilon)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
p_\varepsilon(\epsilon) &= \det(\varepsilon - \epsilon \mathbb{I}_3) \quad \text{(1 Punkt)} \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\epsilon & 1 & 0 \\ 1 & 2-\epsilon & 1 \\ 0 & 1 & 1-\epsilon \end{bmatrix}\right) \\
&= (1-\epsilon)\cdot\det\left(\begin{bmatrix} 2-\epsilon & 1 \\ 1 & 1-\epsilon \end{bmatrix}\right) - 1\cdot\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\epsilon \end{bmatrix}\right) \\
&= (1-\epsilon)\cdot((2-\epsilon)\cdot(1-\epsilon)-1) - ((1-\epsilon)-0) \\
&= (1-\epsilon)\cdot((\epsilon-2)\cdot(\epsilon-1)-1-1) \\
&= -(\epsilon-1)\cdot(\epsilon^2-3\epsilon+0) \\
&= -(\epsilon-1)\epsilon(\epsilon-3) \\
&= -\epsilon(\epsilon-1)(\epsilon-3). \quad \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die drei Hauptkoeffizienten $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ die folgenden Werte

$$\epsilon_1 = 0, \quad \epsilon_2 = 1, \quad \epsilon_3 = 3. \quad \text{(3 Punkte, je 1 Punkt)}$$

Um die drei Hauptverzerrungsrichtungen $v_{\epsilon_1}, v_{\epsilon_2}, v_{\epsilon_3}$ zu berechnen, müssen wir die Gleichung

$$\varepsilon v_{\epsilon_i} = \epsilon_i v_{\epsilon_i} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\epsilon_i}^1 \\ v_{\epsilon_i}^2 \\ v_{\epsilon_i}^3 \end{bmatrix} = \epsilon_i \begin{bmatrix} v_{\epsilon_i}^1 \\ v_{\epsilon_i}^2 \\ v_{\epsilon_i}^3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} v_{\epsilon_i}^1 + v_{\epsilon_i}^2 \\ v_{\epsilon_i}^1 + 2v_{\epsilon_i}^2 + v_{\epsilon_i}^3 \\ v_{\epsilon_i}^2 + v_{\epsilon_i}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_i v_{\epsilon_i}^1 \\ \epsilon_i v_{\epsilon_i}^2 \\ \epsilon_i v_{\epsilon_i}^3 \end{bmatrix} \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

nach $v_{\epsilon_i} := \begin{bmatrix} v_{\epsilon_i}^1 \\ v_{\epsilon_i}^2 \\ v_{\epsilon_i}^3 \end{bmatrix}$ auflösen.

Im Fall $i := 1$ mit $\epsilon_1 = 0$ erhalten wir die Gleichung

$$\begin{bmatrix} v_{\epsilon_1}^1 + v_{\epsilon_1}^2 \\ v_{\epsilon_1}^1 + 2v_{\epsilon_1}^2 + v_{\epsilon_1}^3 \\ v_{\epsilon_1}^2 + v_{\epsilon_1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff v_{\epsilon_1} = \begin{bmatrix} v_{\epsilon_1}^1 \\ v_{\epsilon_1}^2 \\ v_{\epsilon_1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ x \end{bmatrix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $i := 2$ mit $\epsilon_2 = 1$ erhalten wir die Gleichung

$$\begin{bmatrix} v_{\epsilon_2}^1 + v_{\epsilon_2}^2 \\ v_{\epsilon_2}^1 + 2v_{\epsilon_2}^2 + v_{\epsilon_2}^3 \\ v_{\epsilon_2}^2 + v_{\epsilon_2}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{\epsilon_2}^1 \\ v_{\epsilon_2}^2 \\ v_{\epsilon_2}^3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} v_{\epsilon_2}^2 \\ v_{\epsilon_2}^1 + v_{\epsilon_2}^3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff v_{\epsilon_2} = \begin{bmatrix} v_{\epsilon_2}^1 \\ v_{\epsilon_2}^2 \\ v_{\epsilon_2}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $i := 3$ mit $\epsilon_3 = 3$ erhalten wir die Gleichung

$$\begin{bmatrix} v_{\epsilon_3}^1 + v_{\epsilon_3}^2 \\ v_{\epsilon_3}^1 + 2v_{\epsilon_3}^2 + v_{\epsilon_3}^3 \\ v_{\epsilon_3}^2 + v_{\epsilon_3}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_{\epsilon_3}^1 \\ 3v_{\epsilon_3}^2 \\ 3v_{\epsilon_3}^3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -2v_{\epsilon_3}^1 + v_{\epsilon_3}^2 \\ v_{\epsilon_3}^1 - v_{\epsilon_3}^2 + v_{\epsilon_3}^3 \\ v_{\epsilon_3}^2 - 2v_{\epsilon_3}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff v_{\epsilon_3} = \begin{bmatrix} v_{\epsilon_3}^1 \\ v_{\epsilon_3}^2 \\ v_{\epsilon_3}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ x \end{bmatrix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Für die drei Hauptverzerrungsrichtungen $v_{\epsilon_1}, v_{\epsilon_2}, v_{\epsilon_3}$ erhalten wir somit

$$v_{\epsilon_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_{\epsilon_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_{\epsilon_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{(3 Punkte, je 1 Punkt)}$$

Auch die folgenden Antworten sind ebenfalls korrekt

$$v_{\epsilon_1} = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ x \end{bmatrix} \quad \text{für irgendein } x \in \mathbb{R}, \quad v_{\epsilon_1} = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ x \end{bmatrix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$v_{\epsilon_2} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} \quad \text{für irgendein } x \in \mathbb{R}, \quad v_{\epsilon_2} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$v_{\epsilon_3} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ x \end{bmatrix} \quad \text{für irgendein } x \in \mathbb{R}, \quad v_{\epsilon_3} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ x \end{bmatrix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

6. (8 Punkte)
Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
L_{\mathcal{B}\mathcal{A}} &= \mathcal{A}^{-1}\,\mathcal{B} \quad (1 \text{ Punkt})\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ Punkt})\\
&= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -4 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (2 \text{ Punkte})\\
&= \begin{bmatrix} \frac{10}{17} & \frac{20}{17} & -\frac{10}{17} \\ -\frac{8}{17} & \frac{1}{17} & \frac{8}{17} \\ \frac{23}{17} & \frac{12}{17} & \frac{11}{17} \end{bmatrix}. \quad (4 \text{ Punkte})
\end{aligned}
$$

Daher erhalten wir als Resultat

$$
L_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \frac{10}{17} & \frac{20}{17} & -\frac{10}{17} \\ -\frac{8}{17} & \frac{1}{17} & \frac{8}{17} \\ \frac{23}{17} & \frac{12}{17} & \frac{11}{17} \end{bmatrix}.
$$

7. (8 Punkte)
Es bezeichne $\mathcal{E} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und

$$
\mathcal{B} := \left\{ b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, b_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.
$$

Sei weiter $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ die Transformationsmatrix von der Standardbasis $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$, gegeben durch

$$
L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} := \mathcal{E}^{-1}\,\mathcal{B} = \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1 \text{ Punkt})
$$

Wir berechnen die folgende Determinante

$$
\begin{aligned}
\det(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) - 3\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right) + 3\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right)\\
&= 2 - 18 - 3 = -19 \neq 0. \quad (1 \text{ Punkt})
\end{aligned}
$$

Da die obige Determinante zur Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ gehört und die Determinante ungleich Null ist, definiert $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$, da gilt

$$\begin{aligned}
\det(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}) = -19 \neq 0 \quad &\Longrightarrow \; L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \text{ ist invertierbar} \\
&\Longrightarrow \; L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \text{ hat Rang 3 } (L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \text{ hat vollen Rang}) \\
&\Longrightarrow \; \text{Die drei Vektoren } b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\; b_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } b_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\qquad \text{sind linear unabhängig} \\
&\Longrightarrow \; \mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\} \text{ ist eine Basis von } \mathbb{R}^3. \; \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

Wegen der Kontravarianz der Dualbasis müssen wir $\Lambda = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}$ berechnen. Es ist

$$\Lambda = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = L_{\mathcal{E}\,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{9}{19} \\ \frac{6}{19} & \frac{9}{19} & -\frac{8}{19} \\ \frac{1}{19} & -\frac{8}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix}. \; \text{(2 Punkte)}$$

Die Koordinatenvektoren der Dualbasis $\mathcal{B}^* := \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ von $\mathcal{B}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^* := \{\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3\}$ von $(\mathbb{R}^3)^*$ können nun als Zeilen der Matrix $\Lambda = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}$ abgelesen werden, da gilt

$$\beta^i(v) = [v]_{\mathcal{B}}^i = \left(L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}[v]_{\mathcal{E}}\right)^i \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \text{ und alle } v \in \mathbb{R}^3.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\beta^1 &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{9}{19} \end{bmatrix} = -\frac{2}{19}\epsilon^1 - \frac{3}{19}\epsilon^2 + \frac{9}{19}\epsilon^3, \; \text{(1 Punkt)} \\
\beta^2 &= \begin{bmatrix} \frac{6}{19} & \frac{9}{19} & -\frac{8}{19} \end{bmatrix} = \frac{6}{19}\epsilon^1 + \frac{9}{19}\epsilon^2 - \frac{8}{19}\epsilon^3, \; \text{(1 Punkt)} \\
\beta^3 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{19} & -\frac{8}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix} = \frac{1}{19}\epsilon^1 - \frac{8}{19}\epsilon^2 + \frac{5}{19}\epsilon^3. \; \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

8. (8 Punkte)
Wir wählen die drei Basisvektoren der Basis $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ zum Beispiel zu

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}, \quad \text{(1 Punkt)}$$
$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}, \quad \text{(1 Punkt)}$$
$$b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \perp \mathcal{P} \text{ an der Stelle } (0,0,0). \quad \text{(1 Punkt)}$$

Es muss nun gelten, dass

$$\begin{aligned} T(b_1) &= b_1 = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3, \\ T(b_2) &= b_2 = 0b_1 + 1b_2 + 0b_3, \\ T(b_3) &= -b_3 = 0b_1 + 0b_2 - 1b_3. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Zudem gilt

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

für die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ von der Standardbasis $\mathcal{E}$ zur Basis $\mathcal{B}$ und damit folgt

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix} \quad \text{(2 Punkte)}$$

für den Basiswechsel von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{E}$.

Deshalb erhalten wir schlussendlich

$$M_T = [T]_\mathcal{E} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[T]_\mathcal{B} L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}. \text{ (2 Punkte)}$$

9. (8 Punkte)

Wir bezeichnen mit $[\psi]_\mathcal{B}$ die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ und mit $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$. Die Matrixdarstellung $[\psi]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ von ψ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$ genügt folgender Gleichung

$$[\psi]_{\tilde{\mathcal{B}}} = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1}[\psi]_\mathcal{B} L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}. \text{ (1 Punkt)}$$

Wir berechnen daher $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ und $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1}$ und erhalten

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{-1}\tilde{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 1 & 0 & -2 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ (2 Punkte)}$$

und

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 1 & 0 & -2 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{4} & \frac{11}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \text{ (2 Punkte)}$$

Somit gilt

$$[\psi]_{\tilde{\mathcal{B}}} = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}^{-1}[\psi]_\mathcal{B} L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{4} & \frac{11}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 1 & 0 & -2 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{23}{4} & \frac{37}{4} & \frac{25}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 1 & 0 & -2 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 8 & 4 & -3 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \text{ (3 Punkte)}$$

Gute Ideen in einer Aufgabe können zusätzliche Punkte ergeben. Die Punktzahl einer Aufgabe kann jedoch nie die Maximalpunktzahl der Aufgabe überschreiten.

Andere Lösungswege als in diesem Lösungsvorschlag ergeben die entsprechende Anzahl Punkte, gemessen am Erkenntnisfortschritt in einer Aufgabe. Es gibt 1/2-Punkte.