1. **(10 Punkte)**

Gegeben sind eine ganze Zahl $n > 1$ und die drei $n \times n$ Matrizen $A = (A^{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $B = (B_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ und $C = (C^i_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, wobei i den Reihenindex und j den Spaltenindex bezeichnet.

Für jede Matrix $M = (M^i_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ bezeichnen wir $(M)^i_j := M^i_j$.

Ordne jeden Term auf der linken Seite dem gleichwertigen Term auf der rechten Seite zu. **Begründe alle deine Antworten.**

I.	$A^{ip}C^q_pB_{qj}$	a.	$\mathrm{Spur}(C) \cdot (AB)^i_j$
II.	$A^{ip}C^q_qB_{pj}$	b.	$(A^TC^TB)^i_j$
III.	$A^{ip}C^q_jB_{pq}$	c.	$(ABC)^i_j$
IV.	$A^{pi}C^q_pB_{qj}$	d.	$(AC^TB)^i_j$
V.	$A^{pq}C^i_pB_{qj}$	e.	$(CAB)^i_j$

Lösung: Es gilt I. = d., II. = a., III. = c., IV. = b. und V. = e.:

$$A^{ip}C^q_pB_{qj} = \sum_{P=1}^{n}\sum_{Q=1}^{n} A^{iP}(C^T)^P_QB_{Qj} = \sum_{Q=1}^{n}(AC^T)^i_QB_{Qj} = (AC^TB)^i_j$$

$$A^{ip}C^q_qB_{pj} = \left(\sum_{Q=1}^{N} C^Q_Q\right)\left(A^{ip}B_{pj}\right) = \mathrm{Spur}(C)\left(\sum_{P=1}^{n} A^{iP}B_{Pj}\right) = \mathrm{Spur}(C) \cdot (AB)^i_j$$

$$A^{ip}C^q_jB_{pq} = \sum_{P=1}^{n}\sum_{Q=1}^{n} A^{iP}B_{PQ}C^Q_j = (ABC)^i_j$$

$$A^{pi}C^q_pB_{qj} = \sum_{P=1}^{n}\sum_{Q=1}^{n} C^Q_PA^{Pi}B_{Qj} = \sum_{Q=1}^{n}(CA)^{Qi}B_{Qj} = \sum_{Q=1}^{n}((CA)^T)^{iQ}B_{Qj}$$
$$= \sum_{Q=1}^{n}((A^TC^TB)^i_j$$

$$A^{pq}C^i_pB_{qj} = C^i_pA^{pq}B_{qj} = \sum_{P=1}^{n}\sum_{Q=1}^{n} C^i_PA^{PQ}B_{Qj} = (CAB)^i_j$$

2. **(4 Punkte)** Sei V ein Vektorraum der Dimension n mit den zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ und sei $L = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$. Sei weiter wie üblich $\Lambda = L^{-1}_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = L^{-1}$.

Beschreibe in der Einsteinschen Summenkonvention das Transformationsverhalten eines Tensor T vom Typ $(2,1)$ mit Koordinaten T^{ij}_k bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{T}^{ij}_k$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

Lösung: Wenn T ein Tensor vom Typ $(2,1)$ ist, gilt $\tilde{T}^{ij}_k = \Lambda^i_p\Lambda^j_qL^r_kT^{pq}_r$.

3. **(6 Punkte)**

Gegeben ist die Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ und das Skalarprodukt mit Matrixdarstellung bezüglich $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$[g]_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{E}^g$ von $\mathcal{E}$ bezüglich g.

Lösung: Sei $\mathcal{E}^g = \{e^1, e^2, e^3\}$ die gesuchte Basis. Per Definition gilt es

$$\begin{bmatrix} [e^1]_\mathcal{E} \\ [e^2]_\mathcal{E} \\ [e^3]_\mathcal{E} \end{bmatrix} [g]_\mathcal{E} \begin{bmatrix} [e_1]_\mathcal{E} & [e_2]_\mathcal{E} & [e_3]_\mathcal{E} \end{bmatrix} = \mathrm{Id} \iff \begin{bmatrix} [e^1]_\mathcal{E} \\ [e^2]_\mathcal{E} \\ [e^3]_\mathcal{E} \end{bmatrix} [g]_\mathcal{E} \cdot \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \iff \begin{bmatrix} [e^1]_\mathcal{E} \\ [e^2]_\mathcal{E} \\ [e^3]_\mathcal{E} \end{bmatrix} = [g]_\mathcal{E}^{-1}.$$

Wir berechnen die Inverse von $[g]_\mathcal{E}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Somit erhalten wir

$$\begin{bmatrix} [e^1]_\mathcal{E} \\ [e^2]_\mathcal{E} \\ [e^3]_\mathcal{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

und daher

$$\mathcal{E}^g = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. **(10 Punkte)**

Gegeben sind die Linearformen $\beta^1, \beta^2, \beta^3$ auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 2$ definiert durch

$$\begin{aligned}\beta^1(f(x)) &= f(1)\\ \beta^2(f(x)) &= f'(2)\\ \beta^3(f(x)) &= f''(3).\end{aligned}$$

(a) **(5 Punkte)** Zeige, dass sie eine Basis $\mathcal{C} = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ des Dualvektorraums V^* bilden. [*Hinweis:* Bestimme die Komponenten von jedem β^i bezüglich der Basis $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ von V]

(b) **(5 Punkte)** Finde die Basis $\mathcal{B}$ von V, deren Dualbasis gleich $\mathcal{C}$ ist.

Lösung:

(a) Die Koordinaten von jedem β^i bezüglich der Dualbasis $\mathcal{E}^* = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ von $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ sind durch die Werte von β^i auf den Basisvektoren $1, x, x^2$ gegeben:

$$\beta^1(1) = 1, \quad \beta^1(x) = 1, \quad \beta^1(x^2) = 1^2 = 1 \implies [\beta^1]_{\mathcal{E}^*} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$
$$\beta^2(1) = 0|_{x=2} = 0, \quad \beta^2(x) = 1|_{x=2} = 1, \quad \beta^2(x^2) = (2x)|_{x=2} = 4 \implies [\beta^2]_{\mathcal{E}^*} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 4\end{bmatrix},$$
$$\beta^3(1) = 0|_{x=3} = 0, \quad \beta^3(x) = 0|_{x=3} = 0, \quad \beta^3(x^2) = 2|_{x=3} = 2 \implies [\beta^3]_{\mathcal{E}^*} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Die Linearformen $\beta^1, \beta^2, \beta^3$ bilden eine Basis, wenn und nur wenn die Matrix ihrer Komponenten

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

invertierbar ist, was wahr ist, weil die Determinante der obigen Matrix gleich $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \neq 0$ ist.

(b) Wegen der Kontravarianz der Dualbasis gilt es $\beta^i = \Lambda^i_j \varepsilon^j$, wobei $\Lambda = L^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ die Inverse der Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ ist und $\mathcal{E}^* = \{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ der Dualbasis von $\mathcal{E}$ ist. Nach (a) gilt es

$$\begin{bmatrix}\beta^1\\ \beta^2\\ \beta^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon^1\\ \varepsilon^2\\ \varepsilon^3\end{bmatrix}, \text{ so dass } L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \Lambda^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^{-1}.$$

Die Inverse berechnen wir durch Gauss-Reduktion:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right]$$

Somit erhalten wir

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \implies \mathcal{B} = \left\{ 1, -1+x, \frac{3}{2} - 2x + \frac{1}{2}x^2 \right\}.$$

5. **(10 Punkte)**

Wir bezeichnen einen Spannungstensor σ_S als Scherungsdeformation (shear deformation), wenn dessen Spur gleich 0 ist. Ausserdem bezeichnen wir einen Spannungstensor σ_P als hydrostatischen Druck, falls dessen Hauptspannungen alle gleich sind.

Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$A = [\sigma]_{\mathcal{E}} = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) **(3 Punkte)** Schreibe den obigen Spannungstensor σ als Summe einer Scherungsdeformation σ_S und eines hydrostatischen Drucks σ_P.

(b) **(7 Punkte)** Bestimme die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sowie die ersten drei Spannungsinvarianten I_1, I_2 und I_3 des obigen Spannungstensors σ.

Lösung:

(a) Es gilt $\mathrm{Spur}(\sigma) = -\frac{3}{2}$. Somit erhalten wir

$$[\sigma_S]_{\mathcal{E}} = [\sigma]_{\mathcal{E}} - \frac{1}{3}\mathrm{Spur}(\sigma)\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{und } [\sigma_P]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{3}\mathrm{Spur}(\sigma)\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) Wir berechnen das charakteristische Polynom von σ,

$$\begin{aligned} p_\sigma(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda + \lambda^2)\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) + \lambda + 1 + \lambda = (1+2\lambda)\left(-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 + 1\right) \\ &= -\frac{1}{2}(1+2\lambda)\left(-2 + \lambda + \lambda^2\right) = \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)(-1+\lambda)(2+\lambda). \end{aligned}$$

Die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind die Eigenwerte von σ, die gleich den Eigenwerten von σ sind. Also sind die Hauptspannungen durch $\sigma_1 = -2$, $\sigma_2 = -\frac{1}{2}$ und $\sigma_3 = 1$.

Die Spannunginvarianten berechnen wir aus den Hauptspannungen:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \mathrm{Spur}(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -\frac{3}{2} \\
I_2 &= \pm(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = \pm(1 - 2 - \frac{1}{2}) = \mp\frac{3}{2} \\
I_3 &= \det(\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1.
\end{aligned}
$$

Bei I_2 haben wir zwei verschiedene Vorzeichnenkonventionen berücksichtig. Das Kandidat kann die Konvention frei wählen.

6. **(10 Punkte)**

Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Reflexion an der Ebene π gegeben durch

$$\pi : 2x + y - z = 0.$$

Finde die Matrixdarstellung $[\psi]_\mathcal{E}$ von ψ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Lösung: Die Vektoren $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, die zu ℓ liegen, erfüllen die Gleichung

$$0 = 2x + y - z = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Also ist dass der Vektor $b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ orthogonal zu π, was impliziert $\psi(b_1) = -b_1$.

Weiter gehören die Vektoren $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ zu π, was bedeutet, dass $\psi(b_2) = b_2$ und $\psi(b_3) = b_3$ gelten.

Die drei genommenen Vektoren bilden eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, da die Determinante der Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

gleich $-2-2-8=-12 \neq 0$ ist und $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ daher invertierbar ist. Ihre Inverse ist

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ ist

$$[\psi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus folget, dass die Matrixdarstellung von ψ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
[\psi]_{\mathcal{E}} &= L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1}[\psi]_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[\psi]_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \\
&= -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 8 & -8 \\ 8 & -8 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

7. **(10 Punkte)**
Gegeben sind die Basen $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ und $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$b_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \; b_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Weiter sind der Vektor $v = c_1 + c_2$ und das Standardskalarprodukt g auf $\mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) **(3 Punkte)** Berechne die Dualbasis $\mathcal{B}^*$ von $\mathcal{B}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^*$ von $(\mathbb{R}^2)^*$.

(b) **(5 Punkte)** Berechne die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{C}$.

Die Transformationsmatrix von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$ ist durch

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

gegeben.

(c) **(2 Punkte)** Sei $w \in \mathbb{R}^2$ der Vektor mit kovarianten Koordinaten bezüglich $\mathcal{C}$ gegeben durch

$$[w]_{\mathcal{C}^g} = [1 \quad -1].$$

Berechne die kovarianten Koordinaten von w bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung:

(a) Wir notieren $\mathcal{E}^* = \{\varepsilon^1, \varepsilon^2\}$ und $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \beta^2\}$. Wegen der Kontravarianz der Dualbasis, gilt es $\beta^i = \Lambda^i_j \varepsilon^j$, wobei $\Lambda = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}$ gegeben durch

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

ist. Somit erhalten wir

$$\beta^1 = \frac{1}{2}\varepsilon^2$$
$$\beta^1 = \frac{1}{6}\varepsilon^1 - \frac{5}{12}\varepsilon^2.$$

(b) *Methode 1*: Sei $[g]_{\mathcal{C}} = [g^{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{C}$. Weiter notieren wir $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}$ und $[v]_{\mathcal{C}^g} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$. Wegen der Beziehung zwischen der kovarianten und kontravarianten Koordinaten gilt es

$$v_i = g_{ij} v^j.$$

Das lässt sich alternativ als die Matrixgleichung

$$[v]_{\mathcal{C}^g}^T = [g]_{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{C}}$$

schreiben.

Da $v = c_1 + c_2$ gilt, sind die kontravarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{C}$ durch $v^1 = v^2 = 1$ gegeben. Wegen der Kovarianz der Matrixdarstellung einer Bilinearform gilt es

$$[g_{ij}] = [g]_{\mathcal{C}} = L_{\mathcal{C}\mathcal{E}}^T \cdot [g]_{\mathcal{E}} \cdot L_{\mathcal{C}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Alternativ kann man $[g]_{\mathcal{C}}$ direkt berechnen:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} g(c_1, c_1) & g(c_1, c_2) \\ g(c_2, c_1) & g(c_2, c_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$v_1 = 2v^1 + v^2 = 3 \text{ und } v_2 = v^1 + 5v^2 = 6$$

Methode 2: Wir berechnen $[v]_{\mathcal{E}} = v = c_1 + c_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Da $\mathcal{E}$ orthonormal bezüglich des Standardprodukts g ist, gilt es $\mathcal{E}^g = \mathcal{E}$ und daher $[v]_{\mathcal{E}^g} = [v]_{\mathcal{E}}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}$.
Seien v_i (resp. $\hat{v}_i$) die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{E}$) und $L_{\mathcal{C}\mathcal{E}} = [\hat{L}_j^i]$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{C}$. Dann gilt es $v_i = \hat{L}_i^j \hat{v}_j$. Die Matrix $L_{\mathcal{C}\mathcal{E}}$ ist durch die Spaltenvektoren c_1 und c_2 gegeben:

$$L_{\mathcal{C}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Somit erhalten wir

$$[v]_{\mathcal{C}^g} = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Methode 3: Wie bei der Methode 2 gilt es $[v]_{\mathcal{E}} = v = c_1 + c_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Wir berechnen die reziproke Basis $\mathcal{C}^g = \{c^1, c^2\}$ von $\mathcal{C}$ bezüglich g. Es hat

$$\begin{bmatrix} [c^1]_{\mathcal{E}} \\ [c^2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} [g]_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} [c_1]_{\mathcal{E}} & [c_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \mathrm{Id} \iff \begin{bmatrix} [c^1]_{\mathcal{E}} \\ [c^2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Die koordinaten $[v]_{\mathcal{C}^g} = [v_1 \quad v_2]$ von v bezüglich $\mathcal{C}^g$ müssen dann die Gleichung

$$v_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = [3 \quad 0]$$

erfüllen. Es ist klar, dass die obige Gleichung die einzige Lösung $[v]_{\mathcal{C}^g} = [v_1 \quad v_2] = [3 \quad 6]$ besitzt.